

**ЗАВДАННЯ III ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ УЧНІВСЬКОЇ
ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ, 2018-2019 Н.Р.**

7 КЛАС

0. Пара цілих чисел задовольняє рівності $(x-1)^2 + y^2 = 0$. Яке значення може приймати число y :

а) 0; б) 10; в) 100; г) 2019?

(У роботі треба написати лише пункт вірної відповіді без пояснень).

1. Чи існує пара правильних нескоротних дробів, різниця яких дорівнює їх добутку і знаменник одного з яких дорівнює 2019? Якщо існує, то знайдіть принаймні дві пари таких дробів.

2. З точки O проти руху годинникової стрілки проведені n променів OA_1, OA_2, \dots, OA_n , при цьому $\angle A_1OA_n < 180^\circ$. Для якого найменшого n могло таке статися, що серед кутів $\angle A_iOA_j, 1 \leq i < j \leq n$ буде пара кутів величиною 60° , пара кутів величиною 45° та пара кутів величиною 30° .

3. Знайдіть середнє арифметичне усіх п'ятицифрових чисел, що мають такі властивості:

- число має вигляд $\overline{ab0cd}$, тобто третя цифра дорівнює нулю;
- усі цифри різні;
- число $\overline{ab0cd}$, а також число $\overline{dc0ba}$ діляться націло на 7?

4. У виразі $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \dots \pm 2018$ Андрій обирає один із знаків перед кожним числом. Скільки різних додатних значень може при цьому вийти як результат обчислення значення з обраними знаками?

8 КЛАС

1. Розглянемо на декартовій площині сукупність прямих $y = (k + n)x + (k - n)$, де k, n – довільні цілі числа. Чи існує точка з цілими координатами, через яку не пройде жодна з таких прямих?

2. На дошці записане число 2019. Катя та Микола по черзі (розпочинає Катя) роблять такі ходи: вони вибирають будь-який дільник d записаного на дошці числа N і записують на дошці замість числа N число $N - (2d - 1)$, якщо воно є натуральним. Програє той, хто напише на дошці число 1. Хто може перемогти в цій грі, якщо кожний прагне перемогти?

3. У трикутнику ABC відомо, що $2AC = AB$ та $\angle A = 2\angle B$. У цьому трикутнику провели бісектрису AL , і позначили точку M – середину сторони AB . Виявилося, що $CL = ML$. Доведіть, що $\angle B = 30^\circ$.

4. Знайдіть натуральне число n , для якого справджується рівність:
 $n^2 = 2 \cdot (20^4 + 19^4 + 39^4)$.

5. В клітинках таблиці 3×3 розставлені натуральні числа так, що сума чисел у довільних двох сусідніх по стороні клітинках є факторіалом натурального числа. Доведіть, що у цій таблиці знайдуться принаймні 3 рівних числа.

Факторіалом натурального числа n називається добуток $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

9 КЛАС

1. Розглянемо на декартовій площині сукупність парабол $y = kx^2 + (k - n)x + (k + n)$, де k, n – довільні цілі числа. Чи існує точка з цілими координатами, через яку не пройде жодна з таких парабол?

2. У прямокутному трикутнику ABC довжини катетів задовольняють умові: $BC = \sqrt{2} AC$. Доведіть, що медіани AN та CM взаємно перпендикулярні.

3. На довгій паперовій смужці без пробілів записані три числа 2^{100} , 3^{100} та 5^{100} , так що утворилося багатоцифрове число N . Арсеній стверджує, що може змінити останню цифру числа N так, що утвориться степінь числа 13. Чи правий він?

4. Доведіть для додатних чисел x, y, z доведіть нерівність:

$$\frac{x^8 + 1}{x^4} + \frac{y^8 + 1}{y^4} + \frac{z^8 + 1}{z^4} \geq 2 \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \right).$$

5. У клітинках таблиці 4×4 розставлені натуральні числа так, що сума чисел у довільних двох сусідніх по стороні клітинках є факторіалом натурального числа. Доведіть, що у цій таблиці знайдуться принаймні 4 рівних числа.

Факторіалом натурального числа n називається добуток $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

10 КЛАС

1. Розв'яжіть рівняння $\frac{\sqrt{x} + 2}{\cos 2x + 3} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\cos 2x + 1}$.

2. На дошці записане число 2019. Катя та Микола по черзі (розпочинає Катя) роблять такі ходи: вони вибирають будь-який дільник d записаного на дошці числа N , і записують на дошці замість числа N число $N - (4d - 1)$, якщо воно натуральне. Програє той, хто не зможе зробити хід за правилами. Хто може перемогти в цій грі, якщо кожний прагне перемогти?

3. Назвемо прямокутний трикутник ABC особливим, якщо довжини його сторін AB , BC та CA цілі числа, та на кожній з цих сторін є деяка точка X (відмінна від вершин $\triangle ABC$), для якої довжини відрізків AX , BX та CX – цілі числа. Знайдіть принаймні один особливий трикутник

4. Нехай m та n – натуральні числа, причому жодне з них не кратне 6. Прямокутник $m \times n$ виклали квадратами 2×2 та 3×3 . Доведіть, що цей

прямокутник можна викласти квадратами принаймні одного з видів 2×2 або 3×3 .

5. Знайдіть усі додатні чисел x , y , z , що задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} (x+1) + (y+1) \leq (z+1)^2, \\ \left(\frac{1}{x}+1\right)\left(\frac{1}{y}+1\right) \leq \left(\frac{1}{z}+1\right)^2. \end{cases}$$

11 КЛАС

1. Знайдіть усі розв'язки рівняння $\frac{2\cos 2x}{6-3\cos 3x} = \frac{\cos 2x+1}{\cos 3x+2}$, якщо $-\pi \leq x \leq \pi$.

2. У гострокутному трикутнику ABC , у якому $AC < AB$, точка M – середина сторони BC , K – середина ламаної BAC . Доведіть, що $\sqrt{2} KM > AB$.

3. Розглянемо таблицю $m \times n$, $m, n \geq 2$ (m рядків, що занумеровані числами $1, 2, \dots, m$ та n стовпчиків, що занумеровані числами $1, 2, \dots, n$), яка заповнена натуральними числами. Нехай b_i – НСК (найменше спільне кратне) усіх чисел, що стоять в i -му рядку, $1 \leq i \leq m$, і визначимо число B – НСД (найбільший спільний дільник) чисел (b_1, b_2, \dots, b_m) . Також нехай $c_j \in$ НСД усіх чисел, що стоять в j -му стовпчику, $1 \leq j \leq n$, та визначимо число C – НСК чисел (c_1, c_2, \dots, c_n) . Чи можна стверджувати, що обов'язково або B ділиться націло на C , або навпаки, C ділиться націло на B ?

4. Знайдіть усі додатні чисел x , y , z , що задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} (x+1) + (y+1) \leq (z+1)^2, \\ \left(\frac{1}{x}+1\right)\left(\frac{1}{y}+1\right) \leq \left(\frac{1}{z}+1\right)^2. \end{cases}$$

5. Чи існує зв'язна фігура F , що складається з клітин 1×1 , яка задовольняє такі умови:

- вона складається з s клітин 1×1 і не є прямокутником;
- будь-який прямокутник завбільшки $k \times s$, де $k \geq s$ можна розрізати на фігурки, що співпадають з F ?

Фігура, що складається з клітин 1×1 , називається зв'язною, якщо з будь-якої її клітини можна дістатися будь-якої іншої, ходячи через сторони інших клітинок фігури.