

Розв'язки завдань III етапу Всеукраїнської олімпіади з астрономії 11 клас

1. У момент верхньої кульмінації зірки α Дракона на зенітній відстані $9^{\circ}17'$ на північ від зеніту зоряний годинник, що йде за грінвіцьким часом, показував $7^{\text{h}}20^{\text{m}}38^{\text{s}}$. Екваторіальні координати α Дракона: пряме сходження $14^{\text{h}}03^{\text{m}}02^{\text{s}}$, схилення $+64^{\circ}37'$. Визначити географічні координати місця спостереження.

Розв'язок

Оскільки зоря кульмінує на північ від зеніту, то $\delta > \varphi$. Її висота в верхній кульмінації

$$h_{\text{в}} = 90^{\circ} + \varphi - \delta,$$

а зенітна відстань

$$z_{\text{в}} = 90^{\circ} - h_{\text{в}} = \delta - \varphi.$$

Звідси знаходимо широту місця спостереження:

$$\varphi = \delta - z_{\text{в}} = 64^{\circ}37' - 9^{\circ}17' = 55^{\circ}20'.$$

Зоряний час в місці спостереження дорівнює прямому сходженню світил, які в цей момент перебувають у верхній кульмінації. Отже,

$$s = \alpha = 14^{\text{h}}03^{\text{m}}02^{\text{s}}.$$

Зоряний час у пункті з географічною довготою λ пов'язаний з зоряним часом на Грінвічі співвідношенням:

$$s = s_0 + \lambda,$$

звідки

$$\lambda = s - s_0 = 14^{\text{h}}03^{\text{m}}02^{\text{s}} - 7^{\text{h}}20^{\text{m}}38^{\text{s}} = 6^{\text{h}}42^{\text{m}}24^{\text{s}},$$

або в градусній мірі

$$\lambda = 100^{\circ}36'$$

2. 21 вересня 1999 року відбулося покриття Урана Місяцем. В цей день Уран знаходився у сузір'ї Козорога. Яке з двох явищ – покриття чи відкриття Урану – можна було легко спостерігати у невеликі телескопи на темному небі? Відповідь поясніть.

Розв'язок

21 вересня Сонце знаходиться поблизу точки осіннього рівнодення. Користуючись картою зоряного неба, можна встановити, що сузір'я Козорога, де знаходився Місяць, в цей час видиме ввечері, а кутова відстань між Сонцем та Місяцем складає близько 90° . Отже, Місяць перебував у фазі першої чверті (зростаючий).

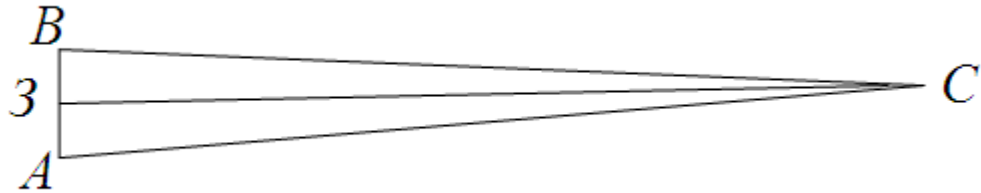
Покриття Урана Місяцем починається східною частиною супутника, яка в цей момент є темною (неосвітленою). Тому зникнення Урану за диском Місяця могло бути точно зафіксоване.

Відкриття Урану відбувалося на західній (освітленій) частині Місяця, а тому поява планети на фоні досить яскравого Місяця фіксувалося значно важче.

3. Коли Земля 4 січня знаходиться в перигелії, Сонце зміщується по небу відносно зір з кутовою швидкістю $61'$ за добу, а 4 липня, коли Земля в афелії – $57'$ за добу. Визначити ексцентриситет земної орбіти.

Розв'язок.

Кути зміщення Сонця по небу відносно зір такі ж, як і кути зміщення Землі по орбіті. За другим законом Кеплера, площі, описані радіус-вектором Землі за однаковий час (за добу) в перигелії і в афелії однакові. Оскільки ці кути малі, площі можна наближено представити у вигляді рівнобедрених трикутників.



На рисунку С – Сонце, З – Земля, тоді СЗ – перигелійна або афелійна відстань. Кут при вершині С ($\angle ACB = \alpha$) – кут зміщення Землі по орбіті. З рівнобедреного ΔACB знаходимо:

$$AB = 2AZ = 2 \cdot CZ \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Площа трикутника ABC

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CZ = CZ^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Тоді для перигелію маємо:

$$S_{\text{п}} = q^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2},$$

для афелію

$$S_{\text{а}} = Q^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2}.$$

Прирівнюючи ці площі, знаходимо:

$$q^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} = Q^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2}.$$

Виразимо перигелійну і афелійну відстані через велику піввісь орбіти і ексцентриситет:

$$q = a(1 - e),$$

$$Q = a(1 + e).$$

Тоді, враховуючи, що для малих кутів тангенс приблизно рівний куту (у радіанах), одержимо:

$$a^2(1-e)^2 \cdot \frac{\alpha_1}{2} = a^2(1+e)^2 \cdot \frac{\alpha_2}{2},$$

$$\frac{(1-e)^2}{(1+e)^2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$

$$\frac{1-e}{1+e} = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}.$$

Відношення кутів однакове що в радіанах, що в градусній мірі, тоді

$$\frac{1-e}{1+e} = \sqrt{\frac{57'}{61'}} \approx 0,967,$$

$$1-e = 0,967(1+e) = 0,967 + 0,967e,$$

$$1 - 0,967 = e + 0,967e,$$

$$0,033 = 1,967e,$$

$$e = \frac{0,033}{1,967} \approx 0,017$$

4. Знайти період повторення протистоянь Юпітера (середній радіус орбіти 5,20 а.о.) для марсіанського спостерігача (середній радіус орбіти Марса 1,52 а.о.) в наближенні колових орбіт.

За III законом Кеплера знаходимо періоди обертання планет (порівнюючи їх з рухом Землі навколо Сонця):

$$\frac{T_3^2}{T^2} = \frac{a_3^2}{a^2},$$

звідки при $T_3=1$ рік, $a_3=1$ а.о. одержимо:

$$T_M = \sqrt{a_M^3} = \sqrt{1,52^3} \approx 1,87 \text{ року},$$

$$T_{Ю} = \sqrt{a_{Ю}^3} = \sqrt{5,20^3} \approx 11,9 \text{ року}.$$

Для спостерігача на Марсі Юпітер виступає верхньою планетою. Застосовуючи формулу синодичного періоду, для часу між двома послідовними однаковими конфігураціями Юпітера одержимо:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_M} - \frac{1}{T_{Ю}},$$

$$S = \frac{T_M T_{Ю}}{T_{Ю} - T_M} = \frac{1,87 \cdot 11,9}{11,9 - 1,87} \approx 2,2 \text{ роки}.$$

5. Астрофізики майбутнього проводили ремонт свого космічного корабля поблизу міжзоряного залізного сферичного астероїда з радіусом 1500 км. Під час ремонту один з дослідників загубив маленьку сталюу кульку з підшипника, яка почала вільно падати на поверхню астероїда. На якій мінімальній відстані від астероїда проводились ремонтні роботи, якщо відомо, що кулька, впавши на поверхню, повністю розплавився. Відомо, що при ударі половина кінетичної енергії кульки пішла на її розігрів. Густина заліза $7,9 \text{ г/см}^3$, питома теплоємність заліза $500 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, питома теплота плавлення сталі 270 кДж/кг , температура плавлення 1535°C .

Розв'язок

Потенціальна енергія кульки в початковий момент

$$E_{p0} = -G \frac{mM}{R+r},$$

де m – маса кульки,

M – маса астероїда,

R – його радіус,

r – віддаль від поверхні астероїда.

Потенціальна енергія на поверхні астероїда

$$E_p = -G \frac{mM}{R}.$$

Початкова кінетична енергія кульки рівна нулю. Застосовуючи закон збереження повної механічної енергії, знаходимо кінетичну енергію кульки біля поверхні:

$$\begin{aligned} -G \frac{mM}{R+r} &= -G \frac{mM}{R} + E_k, \\ E_k &= G \frac{mM}{R} - G \frac{mM}{R+r} = GmM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+r} \right) = GmM \frac{r}{R(R+r)}. \end{aligned}$$

Половина цієї енергії йде на нагрівання і плавлення кульки:

$$Q = \frac{1}{2} E_k = \frac{GmMr}{2R(R+r)}.$$

Для того, щоб повністю розплавити кульку, її потрібно нагріти від початкової температури (яку можемо прийняти рівною абсолютному нулю, оскільки астероїд міжзоряний і, отже, джерел нагрівання у вигляді зірок поруч немає) до температури плавлення $T_{\text{пл}} = 1535 + 273 = 1808 \text{ К}$, а потім розплавити. Для цього потрібна кількість теплоти

$$Q = cm\Delta T + m\lambda = cm(T_{\text{пл}} - 0) + m\lambda = cmT_{\text{пл}} + m\lambda,$$

де c – питома теплоємність матеріалу кульки,

λ – питома теплота плавлення.

Прирівнюючи ці кількості теплоти, одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{GmMr}{2R(R+r)} &= cmT_{\text{пл}} + m\lambda, \\ \frac{R+r}{r} &= \frac{GM}{2R(ct_{\text{пл}} + \lambda)}, \\ \frac{R}{r} + 1 &= \frac{GM}{2R(ct_{\text{пл}} + \lambda)}, \\ r &= \frac{R}{\frac{GM}{2R(ct_{\text{пл}} + \lambda)} - 1}. \end{aligned}$$

Маса астероїда

$$M = \rho V = \frac{4}{3} \pi \rho R^3,$$

$$r = \frac{R}{\frac{G \frac{4}{3} \pi \rho R^3}{2R(cT_{\text{пл}} + \lambda)} - 1} = \frac{R}{\frac{\frac{2}{3} \pi G \rho R^2}{cT_{\text{пл}} + \lambda} - 1}.$$

$$r = \frac{1,5 \cdot 10^6}{\frac{\frac{2}{3} \cdot 3,14 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7900 \cdot 1,5^2 \cdot 10^{12}}{500 \cdot 1808 + 270000} - 1} \approx 1,35 \cdot 10^5 (\text{м}) = 1350 (\text{км})$$

6. Подвійна система складається з двох зір однакових розмірів, температури поверхні яких відрізняються в 2 рази. Визначте амплітуду зміни зоряної величини, якщо нахил орбіти відсутній. В скільки разів при цьому змінюється блиск системи? Зобразіть схематично криву блиску.

Розв'язок

Світність зорі L пропорційна $T^4 \cdot R^2$. Оскільки розміри зір однакові, то відношення світностей таке ж, як відношення температур в четвертому степені:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{T_2^4}{T_1^4} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = 2^4 = 16$$

Оскільки відстань від спостерігача до обох зір подвійної системи однакові, їх освітленості також відрізняються в 16 разів:

$$\frac{E_2}{E_1} = 16.$$

В максимумі блиску, коли обидва компоненти видимі, освітленість системи дорівнює сумі освітленостей компонент:

$$E_{\text{max}} = E_1 + E_2 = E_1 + 16E_1 = 17E_1.$$

В мінімумі блиску темний компонент повністю закриває яскравіший, тому

$$E_{\text{min}} = E_1,$$

а, отже, зміна блиску складає 17 разів.

Для знаходження амплітуди зоряної величини застосуємо формулу Погсона:

$$\frac{E_{\text{max}}}{E_{\text{min}}} = 2,512^{\Delta m} = 10^{0,4\Delta m},$$

звідки

$$\Delta m = 2,5 \lg \frac{E_{\text{max}}}{E_{\text{min}}} = 2,5 \lg 17 \approx 3,1^m$$

7. Спіральна галактика, що знаходиться на відстані 16 Мпк від Сонця, спостерігається «з ребра» (Земля розташована в площині цієї галактики). Видимий поздовжній кутовий розмір галактики – 16'. Швидкість віддалення галактики від Сонця визначена за законом Габбла і складає для центральної частини 1200 км/с. Спектральна лінія, яка в спектрі Сонця спостерігається з довжиною хвилі 500 нм, в спектрах зір, отриманих з різних частин галактики, зміщена по різному. В спектрах зір, видимих на самому краю галактики поблизу її площини, з одного боку дана спектральна лінія спостерігається на довжині 501.5 нм, а з іншого боку – на довжині 502.5 нм. Оцінити період обертання зір, розташованих по краях видимої частини галактики, навколо її центра.

Розв'язок

Вказана в умові швидкість віддалення центральної частини галактики зумовлює зміщення спектральної лінії з довжиною хвилі $\lambda=500$ нм на величину

$$\Delta\lambda = \frac{v_r}{c} \lambda = \frac{1200 \text{ км/с}}{300000 \text{ км/с}} \cdot 500 \text{ Å} = 2,0 \text{ Å},$$

тобто в центрі галактики спектральна лінія має довжину 502 Å. В цій частині немає радіальної складової швидкості за рахунок обертання галактики.

Різне зміщення спектральних ліній в різних частинах галактики пояснюється відмінністю швидкостей цих частин відносно Землі. При обертанні зір навколо центра галактики зорі з одного краю рухаються в напрямку до Сонця, з іншого краю – від Сонця. В першому випадку обертальна швидкість зір віднімається від швидкості віддалення галактики, з другому – додається до неї. Через це на краях галактики спостерігається зміщення $\pm 0,5$ нм відносно значення, одержаного для центральної частини. Таке зміщення відповідає обертальній швидкості:

$$v_0 = \frac{\Delta\lambda_1}{\lambda} c = \frac{0,5 \text{ Å}}{500 \text{ Å}} \cdot 300000 \frac{\text{км}}{\text{с}} = 300 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Це швидкість обертання зір на краю галактики.

Знаючи відстань до галактики та її кутовий розмір, знаходимо діаметр галактики:

$$D = r \cdot tg \frac{\alpha}{2} \approx 16 \text{ Мпк} \cdot tg 16' \approx 74 \text{ кпк}.$$

Тоді зорі на краях галактики віддалені від центра на відстань $R=37 \text{ кпк}=1,14 \cdot 10^{15} \text{ км}$. Вважаючи орбіти цих зірок коловими, знаходимо період їх обертання:

$$T = \frac{2\pi R}{v_0} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 1,14 \cdot 10^{18} \text{ км}}{300 \frac{\text{км}}{\text{с}}} \approx 2,39 \cdot 10^{16} \text{ с} \approx 756 \text{ млн. р.}$$