РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ ІІІ ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ УЧНІВСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ, 2015-2016 н.р.

7 клас

1. Позначимо швидкість онука через x, а відстань через S. Тоді час забігів онука, тата та дідуся відповідно дорівнюють:

$$t_1 = \frac{S}{x} + \frac{S}{x},\ t_2 = \frac{S}{\frac{1}{2}x} + \frac{S}{3x},\ t_3 = \frac{S}{2x} + \frac{S}{\frac{1}{3}x}.$$

Тобто треба порівняти такі числа:

$$a_1 = 2,\ a_2 = 2 + \tfrac{1}{3},\ a_3 = \tfrac{1}{2} + 3.$$

Таким чином, першим прибіг онук, другим – тато, останнім – дідусь.

Відповідь: першим прибіг онук, другим – тато, останнім – дідусь.

2. Прості числа $13, 17, 19$ можуть дати ціле число лише за умови, що вони стоять у чисельнику та у них в знаменнику стоятиме 1, тому принаймні один дріб буде не цілим числом. Покажемо, як зробити так, щоб 10 дробів були цілими числами:

$$\frac{22}{11}, \frac{14}{7}, \frac{15}{5}, \frac{21}{3}, \frac{20}{10}, \frac{18}{9}, \frac{16}{8}, \frac{12}{6}, \frac{19}{1}, \frac{4}{2}, \frac{13}{17}.$$

Відповідь: 10 дробів.

3. Розглянемо групу хлопців, що стоять поспіль. Їх у групі не більше двох. Так само розглянемо групи дівчат, що не розділені хлопчиками. Їх у групі не менше двох. Таким чином ці групи йдуть по черзі, тому їх однакова кількість. При цьому, виходячи із структури груп за кількістю дітей, дівчат не менше ніж хлопців. Якщо припустити, що їх порівну, тобто по 15, то хлопців не менше 8 груп, але тоді й дівчат не менше 8 груп, звідси дівчат не менше 16, а тому їх загальна кількість більше зазначених 30. Одержана суперечність показує, що хлопців не більше 14. Тоді дівчат не менше 16. Те, що потрібна розстановка існує – очевидно. Розглянемо 7 груп хлопців по 2, які чергуються з 6 групами дівчат по 2 та однією групою з 4 дівчат.

Відповідь: 16.

4. В основі міркувань – діагональ прямокутника розбиває його на два трикутники однакової площі. Проведемо відрізки PC, BS, AR та DQ (рис. 1). Тоді з наведених міркувань:

$$S_{PBC} = \tfrac{1}{2} S_{PBCK} = 5,\ S_{BSA} = \tfrac{1}{2} S_{BSAL} = 12,$$

$$S_{ARD} = \tfrac{1}{2} S_{ARDM} = 12,\ S_{CQD} = \tfrac{1}{2} S_{CQDN} = 7{,}5.$$

Звідси, площа чотирикутника дорівнює площі цих чотирьох трикутників та площі квадрату $PQRS$.

$$S_{ABCD} = 5 + 12 + 12 + 7{,}5 + 4 = 40{,}5.$$

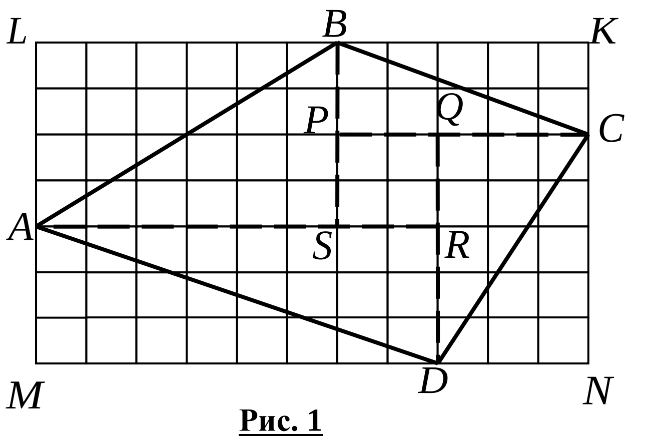


Рис. 1

Відповідь: 40,5.

8 клас

1. Очевидно, що усі цифри числа – парні, бо на останній позиції може стояти лише парна цифра. Якщо серед чисел є одна із цифр 2 або 6, то таке число умову не задовольняє, бо на 4 діляться лише числа із закінченням $12, 32, ..., 92$ та $16, 36, ..., 96$. Тому число має складатися лише з цифр 4 або 8. Порахуємо їх кількість:

З трьох цифр 4 (або 8) – таке число єдине.

З двох цифр 4 та однієї 8 (або навпаки) – таких чисел три.

Разом – 8 чисел.

Відповідь: 8 чисел.

2. $\frac{1}{2}(x^2 - y^3) = 2016$.

Перепишемо умови задачі таким чином:

$$x^2 - y^3 = 2 \cdot 2016 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2^6 \cdot (64-1) = 2^{12} - 2^6.$$

Неважко побачити як шукані розв'язки легко знаходяться.

Відповідь: $x = 64;\ y = 4$

3. Запишемо рівності, які визначаються умовами задачі:

$$S = a(2-b),\ S = b(2-c),\ S = c(2-a),$$

де S – натуральне число, що дорівнює шуканій відстані від дому до школи.

Без обмеження загальності будемо вважати, що $a \ge b$.

Якщо $a > b$, то, якщо швидкість більша на той самий шлях, то час менший, тобто $2-b < 2-c$ або $b > c$.
Звідси аналогічно маємо, що $2-c < 2-a$ або $c > a$. Таким чином, одержали суперечність.

Так само отримаємо суперечність у припущенні, що $a < b$. Залишається можливість $a = b = c$. Тоді маємо, що $S = a(2-a)$.

Покажемо, що $S = a(2-a) \le 1$. Дійсно, $2a - a^2 \le 1 \Leftrightarrow (a-1)^2 \ge 0$.

Таким чином маємо, що з одного боку S – натуральне число, з іншого $S \le 1$.

Звідси $S = 1$.

Зауваження. Або інше пояснення до другої частини доведення.

Маємо, що $S^3 = abc(2-a)(2-b)(2-c)$.

Оскільки для кожної пари множників $a(2-a) \le 1$, то $S^3 \le 1$, звідси $S = 1$.

Відповідь: $S = 1$ км.

4. а) Розглянемо рівносторонній ΔABC, позначимо середини його сторін через M, N, K відповідно (рис. 2).

Відрізки AN, BK та CM перетинаються в точці O. Для розбиття на однакові чотирикутники достатньо розглянути, наприклад, чотирикутники $BMON$, $CKON$ та $AMOK$.

б) позначимо тепер середини відрізків OM, ON та OK через P, R та Q відповідно. Шуканими п'ятикутниками є $ABROP$, $ROQCB$ та $APOQC$.

Відповідь: а), б) так, можна.

5.

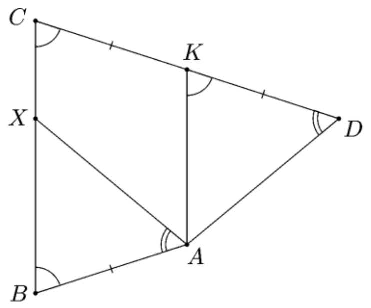


Рис.3

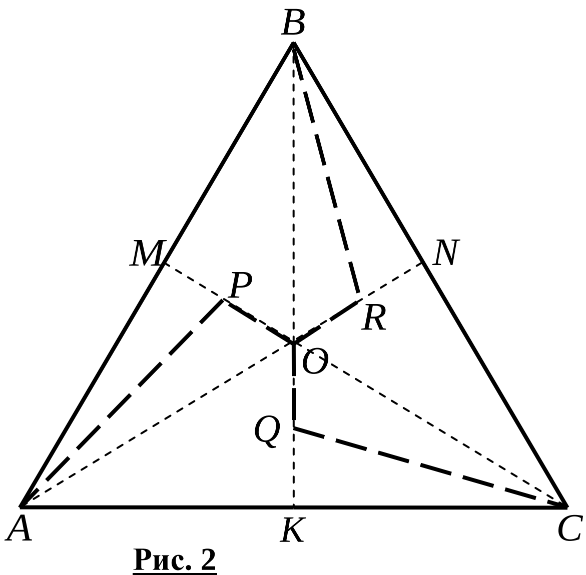


Рис. 2

Нехай K — середина сторони CD (рис. 3). Тоді $CK = DK = \frac{1}{2}CD = AB$, та оскільки $\angle ABC = \angle BCD$, то $ABCK$ — рівнобічна трапеція. Тому $AK \parallel BC$ та $\angle AKD = \angle BCD$. $\Delta ABX = \Delta DKA$ за стороною $AB = DK$ та прилеглим кутам, тому й $AX = AD$.

9 клас

1. Очевидно, що усі цифри числа – парні, бо на останній позиції може стояти лише парна цифра. Якщо серед чисел є одна із цифр 2 або 6, то таке число умову не задовольняє, бо на 4 діляться лише числа із закінченням $12, 32, ..., 92$ та $16, 36, ..., 96$. Тому число має складатися лише з цифр 4 або 8. Порахуємо їх кількість:

З трьох цифр 4 (або 8) – таке число єдине.

З двох цифр 4 та однієї 8 (або навпаки) – таких чисел три.

Разом – 8 чисел.

Відповідь: 8 чисел.

2. $$\begin{cases} x^2 + xy + xz = y, \\ y^2 + yz + yx = z, \\ z^2 + zx + zy = x. \end{cases}$$

Додамо ці рівняння і одержимо, що $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = x + y + z$ або $(x+y+z)^2 = x + y + z$. Таким чином маємо два варіанти.

Варіант 1. $x + y + z = 1$. Тоді з першого рівняння одержимо, що

$$x^2 + xy + xz = x(x+y+z) = x = y,$$

після аналогічних міркувань одержимо $x = y = z$, звідки маємо перший розв’язок $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Варіант 2. $x + y + z = 0$. Знову з першого рівняння одержимо, що

$$x^2 + xy + xz = x(x+y+z) = 0 = y,$$

звідки одержимо $x = y = z = 0$ – другий розв’язок.

Відповідь: $x = y = z = \frac{1}{3}$ та $x = y = z = 0$.

3. Методом від супротивного. Оскільки $10^n - 1 = 9 \cdot (10^{n-1} + ... + 10 + 1)$, то $11^n - 1$ повинно ділитися на 9. Якщо розглянути остачі при діленні на 9 чисел $11^n - 1 \equiv 2^n - 1 \pmod 9$, матимемо таку послідовність: 1; 3; 7; 6; 4; 0; 1; ... . Таким чином $n = 6k$. Але тоді $10^{6k} - 1$ ділиться на $10^6 - 1$, і далі на $10^3 + 1$, на $10 + 1$, тобто на 11, що неможливо

Відповідь: таких натуральних n не існує.

4. Припустимо, що це можливо. Розглянемо сукупність ходів змін знаків, за якими досягається шукана зміна усіх знаків у великому хресті на протилежні. Очевидно, що двічі змінювати знаки у хресті на тому самому місці немає сенсу, таким чином положення хреста, що були використані для зміни знаку, є унікальними. І порядок, в якому робиться зміна знаків по хрестах, не суттєвий.

Розглянемо клітини, що розташовані вздовж діагоналі, від самої верхньої «А» до самої лівої «В» (рис. 4).

Для зміни знаку в клітинах «А» та «В» існує єдине розташування хреста, яке це робить.

При цьому змінюється знак у сусідніх клітинах до «А» та «В».

Після цього на виділеному шматочку клітин треба змінити знаки на решті 1005 клітинах.

Будь-яке розташування хреста, що зачіпає цей набір клітин (і не зачіпає клітин «А» та «В», бо для них це робиться рівно 1 раз і з самого початку) змінює знак рівно у двох клітинах.

Таким чином добуток клітин не змінюється на виділеному ланцюгу клітин. Але у початковий момент вона додатна, а у останній – від'ємна, що й доводить неможливість.

Відповідь: не можна.

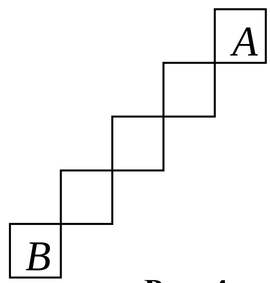
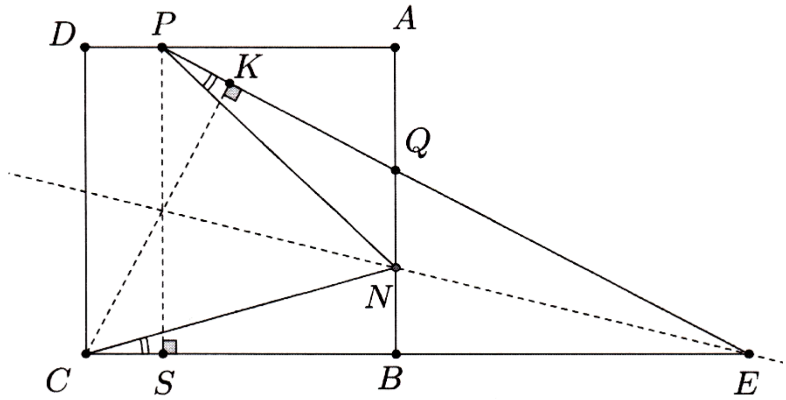


Рис. 4

5. Нехай $E = PQ \cap BC$ (рис. 5), з рівності відрізків $PN = NC$ випливає рівність $\angle NPC = \angle PCN$. З іншого боку $\angle NCB = \angle QPN$. Звідси випливає, що ΔEPC – рівнобедрений, тому висоти $PS = CK$, тому $PS = CK = AB = BC$ і прямокутні трикутники QBC та QKC рівні. Тому CQ - бісектриса $\angle KCB$ та $\angle KQB$, тобто $\angle BCQ = \frac{1}{2}\angle KCB$. З іншого боку, $KCBQ$ – вписаний, тому $\angle BCK = \angle PQA$, що й завершує доведення.

Рис.5



10 клас

1. Позначимо точки таким чином: домівка – D, місце школи – S, точка де Петрик повертає на схід – B, точка, де повертає Остап – N (рис. 6).

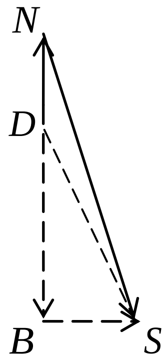


Рис. 6

Тоді за умовою $DB = 210$, $BS = 70$, $DN = x$, $NS = y$.

Крім того, з умов задачі випливає, що $x + y = 280$.

Запишемо теорему Піфагора: $BN^2 + BS^2 = NS^2$ або $(210+x)^2 + 70^2 = y^2 \Rightarrow (210+x)^2 + 70^2 = (280-x)^2$.

$44100 + 420x + x^2 + 4900 = 78400 - 560x + x^2$, звідки $x = 30$.

Відповідь: 30.

2. Випишемо список пар стрибків, які міг зробити коник:

$$1 \leftrightarrow 6,\ 1 \leftrightarrow 9,\ 2 \leftrightarrow 7,\ 2 \leftrightarrow 10,\ 3 \leftrightarrow 8,\ 3 \leftrightarrow 11,\ 4 \leftrightarrow 9,\ 4 \leftrightarrow 12,$$
$$5 \leftrightarrow 10,\ 6 \leftrightarrow 11,\ 7 \leftrightarrow 12.$$

Як бачимо, диски за номерами 5 та 8 зустрічаються тут по одному разу.
Тобто, якщо коник не розпочне з такого стільця, то він на ньому має закінчувати, але таких стільців два.
Тому з одного повинен розпочати, на іншому – закінчити свої стрибки, наприклад так

$$5 \to 10 \to 2 \to 7 \to 12 \to 4 \to 9 \to 1 \to 6 \to 11 \to 9 \to 3 \to 8.$$

Відповідь: № 5 або № 8.

3. а) Джерелом прикладу є той факт, що для цілих x добуток $x(x+1)$ завжди парний. Тому можна навести такий приклад шуканого тричлена:

$$1008x(x+1) + 2016 = 1008x^2 + 1008x + 2016.$$

б) Нехай квадратний тричлен має такий вигляд:

$f(x) = ax^2 + bx + c$, зробимо такі підстановки:

$x = 0 \Rightarrow f(0) = c \vdots 2017;$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = (a+b+c) \vdots 2017;$

$x = -1 \Rightarrow f(-1) = (a-b+c) \vdots 2017.$

Але тоді на 2017 діляться також числа $a+b$ та $a-b$, тому на 2017 повинні ділитися числа $2a$ та $2b$.

Оскільки число 2017 непарне, то усі коефіцієнти тричлена повинні ділитися на 2017.

Відповідь: а) не обов’язково; **б)** обов’язково.

4. Нехай $E = PQ \cap BC$ (рис. 6), з рівності відрізків $PN = NC$ випливає рівність $\angle NPC = \angle PCN$.

З іншого боку $\angle NCB = \angle QPN$.

Звідси випливає, що ΔEPC – рівнобедрений, тому висоти $PS = CK$, тому $PS = CK = AB = BC$ і прямокутні трикутники QBC та QKC рівні.

Тому CQ – бісектриса $\angle KCB$ та $\angle KQB$, тобто $\angle BCQ = \frac{1}{2}\angle KCB$.

З іншого боку, $KCBQ$ – вписаний, тому $\angle BCK = \angle PQA$, що й завершує доведення.

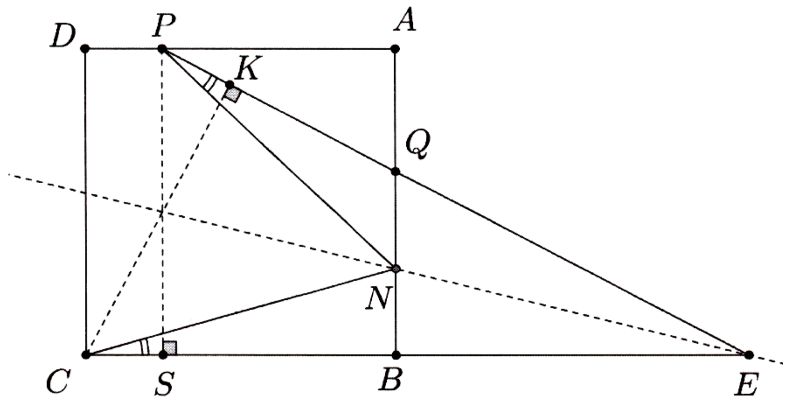


Рис.6

5. $\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+c^2} + \frac{c}{c+a^2} \le \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$

Розглянемо такі перетворення:

$$\frac{a}{a+b^2} = \frac{a}{a(a+b+c)+b^2} = \frac{a}{a^2+ab+ac+b^2} \le \frac{a}{2ab+ab+ac} = \frac{1}{3b+c},$$

з нерівності між середніми маємо, що

$$\frac{4}{\frac{3}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{4}{\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \le \frac{b+b+b+c}{4} = \frac{3b+c}{4}$$

або $\frac{16}{3b+c} \le \frac{3}{b} + \frac{1}{c}$.

Тепер попередня нерівність підсилюється таким чином: $\frac{a}{a+b^2} \le \frac{1}{3b+c} \le \frac{1}{16}(\frac{3}{b} + \frac{1}{c})$.

Якщо тепер додати аналогічні 3 нерівності, матимемо:

$$\frac{a}{a+b^2} + \ldots \le \frac{1}{3b+c} + \ldots \le \frac{1}{16}(\frac{3}{b} + \frac{1}{c}) + \ldots = \frac{1}{16}(\frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c}) = \frac{1}{4}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}).$$

11 клас

1. Оскільки для натуральних n справджується нерівність $\log_{n+1} n < 1$, то очевидно, що $C < 1$.

Для числа B маємо, що $B \cdot C = 1$, звідки $B > 1$, а також

$$B = \frac{\lg 3}{\lg 2} \cdot \frac{\lg 4}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 5}{\lg 4} \cdot \ldots \cdot \frac{\lg 2016}{\lg 2015} = \frac{\lg 2016}{\lg 2} < 11 = A \Leftrightarrow \lg 2016 < 11 \lg 2 = \lg 2^{11}$$

$$\Leftrightarrow 2016 < 2^{11} = 2048.$$

Відповідь: $C < B < A$

2. Нехай квадратний тричлен має такий вигляд:

$f(x) = ax^2 + bx + c$, зробимо такі підстановки:

$x = 0 \Rightarrow f(0) = c \,\vdots\, 2017$;

$x = 1 \Rightarrow f(1) = (a + b + c) \,\vdots\, 2017$;

$x = -1 \Rightarrow f(-1) = (a - b + c) \,\vdots\, 2017$.

Але тоді на 2017 діляться також числа $a + b$ та $a - b$, тому на 2017 повинні ділитися числа $2a$ та $2b$.

Оскільки число 2017 непарне, то усі коефіцієнти тричлена повинні ділитися на 2017.

Відповідь: обов'язково.

3. $ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right) = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right) = ca\left(1 - \frac{b^2}{(c+a)^2}\right)$.

Перепишемо першу рівність таким чином:

$$\frac{a((a+b)^2-c^2)}{(a+b)^2} = \frac{c((b+c)^2-a^2)}{(b+c)^2} \text{ або } \frac{a(a+b-c)(a+b+c)}{(a+b)^2} = \frac{c(b+c-a)(b+c+a)}{(b+c)^2}.$$

Після чергового скорочення маємо, що

$$\frac{a(a+b-c)}{(a+b)^2} = \frac{c(b+c-a)}{(b+c)^2}.$$

Якщо припустити, що $c \ge a + b$, то $b + c > a$, таким чином ліва частина недодатна, а права – додатна.

Одержана суперечність показує, що справджуються нерівності $b + c > a$, $a + c > b$ та $b + a > c$, таким чином можна вважати, що a, b, c – сторони деякого трикутника.

Але тоді рівності, що задані в умові задачі – це є рівності трьох бісектрис трикутника. Дійсно: $l_c^2 = ab - a_1b_1$, де a_1, b_1 – відрізки, на які розбиває ця бісектриса протилежну сторону.

Тоді вони задовольняють умови: $a_1 + b_1 = c$ та $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$.

Звідси неважко одержати, що $a_1 = \frac{ac}{a+b}$ та $b_1 = \frac{bc}{a+b}$.

Тоді $l_c^2 = ab - a_1b_1 = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right)$.

Таким чином з рівності трьох бісектрис з відомої властивості трикутників випливає рівність трьох сторін, тому розв'язком заданих умов будуть довільні трійки (t, t, t), де $t > 0$.

Відповідь: (t, t, t), де $t > 0$.

4. Позначимо через E_1 точку на відрізку BC, для якої $BE = E_1C$ (рис. 7). Нехай $X = A_1E \cap E_1A$. Тоді доведемо, що $IX \parallel BC$.

Нехай $\angle B > \angle C$ та R - радіус описаного кола ΔABC.

$$\frac{AX}{XE_1} = \frac{AA_1}{EE_1} = \frac{AA_1}{AC-AB}, \quad \frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} = \frac{AB+AC}{BC}.$$

З теореми косинусів маємо, що

$AC^2 - AB^2 = BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle B,$

З рівнобедреної трапеції

$$AA_1 = BC - 2BH = BC - 2AB \cos \angle B.$$

Звідси маємо, що $AA_1 \cdot BC = AC^2 - AB^2$. Тому $\frac{AX}{XE_1} = \frac{AI}{ID}$, звідки $IX \parallel BC$.

З вписаного чотирикутника $DEAT$ та одержаної паралельності $IX \parallel BC$ чотирикутник $IATX$ - вписаний. Пари точки A, A_1 та E, E_1 симетричні відносно серединного перпендикуляра до сторони BC, то $XE = XE_1$. Тоді

$$\angle ATI = \angle AXI = \angle XE_1E = \angle XEE_1 = \angle IXE = \angle TAI,$$

звідки остаточно знаходимо, що $IT = IA$.

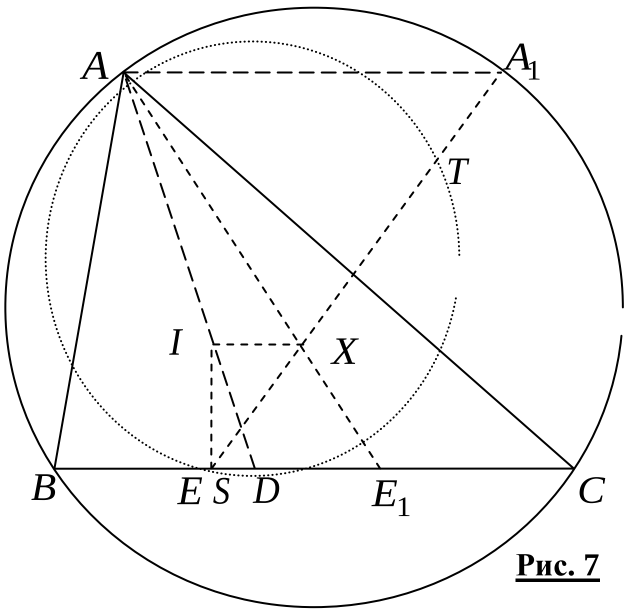


Рис. 7

5. Для $n = 4k$ це можливо. Робимо це так:

$$(1; 3) \to (2; 4), \ldots, (4k-3; 4k-1) \to (4k-2; 4k).$$

Тепер ми маємо, що на дошці записані усі парні числа. При цьому кожне число зустрічається рівно двічі. Тепер їх усі не важно зробити рівними $n = 4k$.

Для $n = 2k+1$ це можливо, робимо це так:

$$(1; n) \to (2; n+1), (3; n+1) \to (4; n+2), \ldots, (n-2; \tfrac{3n-3}{2}) \to (n-1; \tfrac{3n-1}{2}).$$

Тепер ми маємо, що на дошці записані усі парні числа, що менші від n. При цьому кожне число зустрічається рівно двічі. А також записане число $\frac{3n-1}{2}$. Залишається усі пари однакових чисел прирівняти до цього найбільшого числа.

Доведемо методом від супротивного, що для $n = 4k+2$ це неможливо. Сума чисел з самого початку – непарна: $1 + 2 + ... + 4k + 2 = \frac{1}{2}(4k+2)(4k+3) = (2k+1)(4k+3)$. Кожного разу суму усіх чисел ми збільшуємо на парне число, але наприкінці ми маємо усі однакові числа, тобто парну суму. Одержана суперечність завершує доведення.

Відповідь: $n \neq 4k+2$.