Теоретичний тур

Завдання 1 (10, 11 клас)

Увечері учень спостерігав верхню кульмінацію деякої зорі на висоті 66°30' в бік півночі від зеніту, а виміряна ним висота тієї ж зорі у нижній кульмінації дорівнювала 35°42'. Знайдіть схилення зорі та географічну широту місця спостереження.

Розв'язок

Висота зорі над горизонтом для верхньої кульмінації, яка відбувається на північ від зеніту $h_в = 90° + \varphi - \delta$, де φ – географічна широта місця спостереження,δ – схилення зорі.

Для нижньої кульмінації:$h_н = \delta + \varphi - 90°$.

Додавши і віднявши ці рівняння, знаходимо:

$$h_в + h_н = 2\varphi, \quad h_в - h_н = 180° - 2\delta.$$

Звідси знаходимо широту місця спостереження:

$$\varphi = \frac{h_в + h_н}{2} = \frac{66°30' + 35°42'}{2} = 51°06'$$

та схилення зорі:

$$\delta = \frac{180° - (h_в - h_н)}{2} = \frac{180° - (66°30' - 35°42')}{2} = 74°36'.$$

Завдання 2 (10, 11 клас)

Коли Місяць може піднятися вище над горизонтом – влітку чи взимку і чому? Яка найбільша і найменша висота Місяця над горизонтом може бути в м. Суми? Широта Сум 50°55'N.

Розв'язок

Екліптика нахилена до площини небесного екватора під кутом $\varepsilon = 23°26'$. Кут між площиною орбіти Місяця і площиною екліптики складає $j = 5°09'$. Отже, схилення Місяця може змінюватися у межах від

$\delta_{max} = +(\varepsilon + j) = +28°35'$ до $\delta_{min} = -(\varepsilon + j) = -28°35'$.

Висота світила у верхній кульмінації (коли воно максимально піднімається над горизонтом): $h_в = 90° - \varphi + \delta$, де φ – широта місця спостереження.

Тоді максимальна висота Місяця над горизонтом буде при $\delta = \delta_{max}$: $h_{max} = 90° - \varphi + \delta_{max} = 90° - \varphi + 28°35' = 118°35' - \varphi$;

мінімальна – при $\delta = \delta_{min}$:

$h_{min} = 90° - \varphi + \delta_{min} = 90° - \varphi - 28°35' = 61°25' - \varphi$.

Для м. Суми ($\varphi = 50°55'$) маємо: $h_{max} = 118°35' - 50°55' = 67°40'$,

$$h_{min} = 61°25' - 50°55' = 10°30'.$$

Завдання 3 (10 клас)

Поясніть, чому Титан (супутник Сатурна) має досить потужну атмосферу, а Меркурій – ні.

Розв’язок

За сучасними космогонічними уявленнями, в процесі формування планет земної групи внаслідок більш високої температури та впливу сонячного вітру з внутрішньої частини Сонячної системи були практично “виметені” легкі речовини, які накопичувались в її зовнішній частині і стали основою формування планет-гігантів, їх супутників та атмосфер, в той час як в околицях Сонця склався дефіцит “будівельного матеріалу”. Іншим джерелом «будівельного матеріалу» для планетних та супутникових атмосфер є внутрішні еволюційні процеси, що супроводжуються виділенням газів з надр, а також хімічні (і біохімічні, як на Землі) процеси. Атмосферу, що утворилася, треба утримати від розсіяння в просторі, інтенсивність якого залежить від параболічної швидкості поблизу поверхні (вона визначається масою та радіусом небесного тіла і є дещо більшою для Меркурія) та середньої швидкості теплового руху молекул, яка визначається температурою атмосфери. Внаслідок низької температури атмосфери Титана (менше 100 К) його атмосфера зберігається в практично незмінному вигляді, в той час як на Меркурії через наближеність до Сонця температура на денній частині близько 700 К, і атмосфера швидко розсіюється.

Завдання 4 (10 клас)

Супутник нейтронної зорі має масу 100 кг і рухається по коловій орбіті, висота якої 1 км. Нейтронна зоря має масу Сонця і радіус 10 км. Визначити: орбітальний період *T* та орбітальну швидкість v супутника і його силу притягання *F* до нейтронної зорі.

Розв’язок.

Для супутника на коловій орбіті сила тяжіння відіграє роль доцентрової сили: $F_m = F_{дц}$,

$G\frac{Mm}{(R+h)^2} = ma_{дц} = m\frac{v^2}{R+h}$.

Звідси знаходимо орбітальну швидкість v супутника:

$$v = \sqrt{G\frac{M}{(R+h)^2}} \approx 1{,}1 \cdot 10^8\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

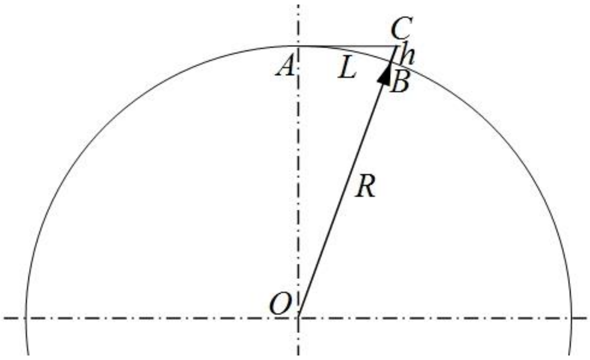
За час, рівний періоду обертання, супутник проходить по орбіті шлях $L = 2\pi(R+h)$. Звідси період обертання: $T = \frac{2\pi(R+h)}{v} \approx 6.3 \cdot 10^{-4}\ c$.

Сила взаємодії зорі і супутника: $F_m = G\frac{Mm}{(R+h)^2} \approx 1{,}1 \cdot 10^{14}$ Н.

Завдання 5 (10, 11 клас)

Космонавти здійснили посадку на берег океану планети Х та побачили, що айсберг, який на 20 м виступає над поверхнею води, повністю зникає з поля зору при віддалені від берега на 20 км. Оцініть радіус планети.

Розв’язок



Айсберг зникає з виду, коли його вершина С стає нижче площини горизонту. Ця площина є дотичною до поверхні планети в точці А, де знаходяться космонавти. З прямокутного ΔOAC за теоремою Піфагора

$$\mathrm{OC}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{AC}^2.$$

При цьому $\mathrm{OA} = R,\ \mathrm{OC} = R + h$. Крім того, оскільки $R \gg h$, довжина відрізка АС практично дорівнює довжині дуги АВ: $AC \approx AB = L$. Тоді

$$L^2 = (R+h)^2 - R^2 = 2Rh + h^2.$$

Нехтуючи другим доданком в силу тієї ж умови *R*>>*h*, одержимо:

$$L^2 \approx 2Rh,\ R \approx \frac{L^2}{2h} = 10^4\ \text{км}.$$

Завдання 6 (10 клас)

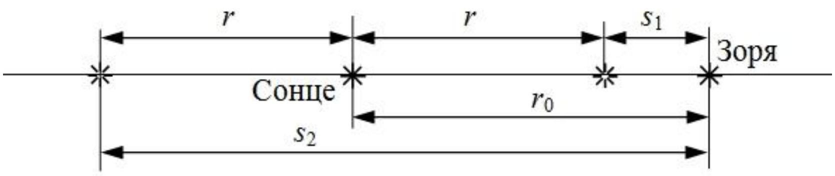
Деяка зоря знаходиться від Сонця на відстані 5,6 світлових років і наближається до нього зі швидкістю 111 км/с. Через скільки років вона здаватиметься вдвічі яскравішою?

Розв’язок

Освітленість, створена зорею, обернено пропорційна квадрату відстані до неї. Тоді для початкової відстані від Сонця та відстані від сонця через деякий час маємо:

$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}_0} = \frac{r_0^2}{r^2}.$$

За умовою $\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}_0} = 2$, тоді $\frac{r_0^2}{r^2} = 2$ та $r = \frac{r_0}{\sqrt{2}} = \frac{5{,}6\ \text{св. років}}{\sqrt{2}} \approx 3{,}96\ \text{св. років}$



Зоря буде на такій відстані від Сонця двічі: один раз – наближаючись до нього, другий – віддаляючись після проходження поблизу Сонця (можливістю зіткнення нехтуємо). У першому випадку зоря проходить відстань $s_1 = r_0 - r = 1{,}64\ \text{св. року} \approx 1{,}55 \cdot 10^{13}\ \text{км}.$

Час, потрібний для цього

$$t_1 = \frac{s_1}{v} \approx 4430\ \text{років}.$$

У другому випадку

$$s_1 = r_0 + r = 9{,}56\ \text{св. року} \approx 9{,}04 \cdot 10^{13}\ \text{км}$$

$$2 = \frac{S_2}{v} \approx 26000 \text{ років}$$

Завдання 7 (10, 11 клас)

Оцініть відношення маси Марса до маси Землі. Супутник Марса Фобос рухається по майже коловій орбіті радіусом 9·10^3 км за 0,3 земні доби.

Розв’язок

Варіант 1

Скористаємося узагальненим третім законом Кеплера:

$$\frac{(M+m)T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G},$$

де M, m – маси тіл, що обертаються навколо спільного центра мас, T – сидеричний період обертання, a – велика піввісь орбіти.

Запишемо це співвідношення для систем Земля-Місяць та Марс-Фобос. При цьому врахуємо, що маси супутників невеликі порівняно з масами планет.

$$\frac{4\pi^2}{G} = \frac{(M_з + m_{\text{Міс}})\mathrm{T}^2_{\text{Міс}}}{a^3_{\text{Міс}}}$$

$$\frac{4\pi^2}{G} = \frac{(M_{\text{М}} + m_{\text{ф}})\mathrm{T}^2_{\text{ф}}}{a^3_{\text{ф}}}$$

Тоді $\frac{(M_з + m_{\text{Міс}})\mathrm{T}^2_{\text{Міс}}}{a^3_{\text{Міс}}} = \frac{(M_{\text{М}} + m_{\text{ф}})\mathrm{T}^2_{\text{ф}}}{a^3_{\text{ф}}} \quad \rightarrow \quad \frac{M_{\text{м}}}{M_з} = \frac{T^2_{\text{м}}\, R^3_{\text{ф}}}{T^2_{\text{ф}}\, R^3_{\text{м}}}$

.

Для Місяця $\mathrm{T}_{\text{Міс}} = 27{,}3$ доби, $a_{\text{Міс}} = 3{,}84 \cdot 10^5$ км, тоді $\frac{M_{\text{м}}}{M_з} \approx 0{,}11.$

Варіант 2

Супутник рухається навколо планети під дією гравітаційної сили по коловій орбіті з доцентровим прискоренням $a = \frac{v^2_{\text{ф}}}{R_{\text{ф}}}$. За другим законом Ньютона: $G\frac{M_{\text{м}} m_{\text{ф}}}{R^2_{\text{ф}}} = m_{\text{ф}} a$. Звідси швидкість його руху $v_{\text{ф}} = \sqrt{G\frac{M_{\text{м}}}{R_{\text{ф}}}}$.

За час, рівний періоду обертання, супутник проходить зі сталою швидкістю шлях $L = 2\pi R_{\text{ф}}$, тоді період руху:

$$\mathrm{T}_{\text{ф}} = \frac{L}{v_{\text{ф}}} = \frac{2\pi R_{\text{ф}}}{\sqrt{G\frac{M_{\text{м}}}{R_{\text{ф}}}}} = 2\pi R_{\text{ф}}\sqrt{\frac{R_{\text{ф}}}{GM_{\text{м}}}}$$

Звідси $M_{\text{м}}\frac{T^2_{\text{ф}}}{R^3_{\text{ф}}} = \frac{4\pi^2}{G}$.

Аналогічно для системи Земля-Місяць маємо: $M_з\frac{T^2_{\text{м}}}{R^3_{\text{м}}} = \frac{4\pi^2}{G}$.

Праві частини обох рівностей однакові, а, отже

$$M_{\text{м}}\frac{T^2_{\text{ф}}}{R^3_{\text{ф}}} = M_з\frac{T^2_{\text{м}}}{R^3_{\text{м}}} \quad \rightarrow \quad \frac{M_{\text{м}}}{M_з} = \frac{T^2_{\text{м}}\, R^3_{\text{ф}}}{T^2_{\text{ф}}\, R^3_{\text{м}}}.$$

Завдання 8 (11 клас)

Міжпланетний апарат обертається навколо Землі на низькій коловій орбіті, що лежить у площині екліптики. Яке мінімальне збільшення швидкості потрібно надати цьому кораблю, щоб він міг без подальших маневрів і вмикання двигунів відправитися вивчати об'єкти поясу Койпера?

Розв'язок

Пояс Койпера знаходиться в зовнішніх областях Сонячної системи (приблизно 55 а.о. від Сонця), тому можна вважати, що для польоту апарат повинен розвинути другу космічну швидкість відносно Сонця. Вважаючи, що Земля рухається по коловій орбіті з швидкістю 29,8 км/с, знаходимо, що для цього швидкість апарата відносно Сонця повинна бути $v = \sqrt{2} \cdot 29{,}8\ \frac{\text{км}}{\text{с}} \approx 42{,}1\frac{\text{км}}{\text{с}}$. Під час запуску в площині екліптики в бік руху Землі відносно Сонця апарат повинен мати відносно Землі додаткову швидкість $u = 42{,}1\frac{\text{км}}{\text{с}} - 29{,}8\frac{\text{км}}{\text{с}} \approx 12{,}3\frac{\text{км}}{\text{с}}$.

На низькій коловій орбіті швидкість апарата дорівнює першій космічній: $v_0 = 7{,}9\frac{\text{км}}{\text{с}}$. Для виходу за межі тяжіння Землі поблизу Землі апарат повинен мати деяку швидкість v_1, яку визначимо із закону збереження повної механічної енергії. Кінетична енергія апарата поблизу Землі $E_{k1} = \frac{mv_1^2}{2}$, потенціальна енергія $E_{p1} = -G\frac{mM_З}{R_З}$.

За межами земного тяжіння $E_{p2} = 0$, $E_{k2} = \frac{mu^2}{2}$.

Тоді $E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$;

$\frac{mv_1^2}{2} - G\frac{mM_З}{R_З} = \frac{mu^2}{2}$;

$v_1^2 = u^2 + \frac{2GM_З}{R_З}$.

Враховуючи, що $v_{II} = \sqrt{\frac{2GM_З}{R_З}}$ – друга космічна швидкість для Землі ($v_{II} = 11{,}2\frac{\text{км}}{\text{с}}$), одержимо: $v_I = \sqrt{u^2 + v_{II}^2} \approx 16{,}6\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$.

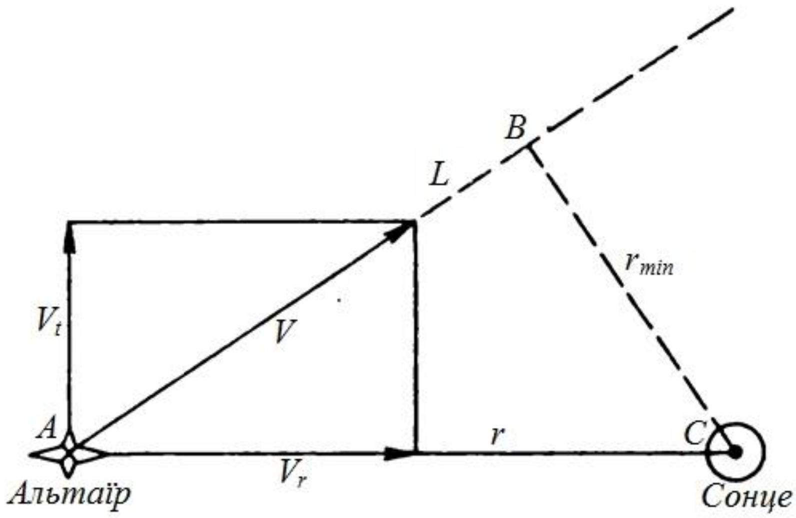
Тоді додаткова швидкість, якої треба надати апарату на орбіті

$$v = 16{,}6\frac{\text{км}}{\text{с}} - 7{,}9\frac{\text{км}}{\text{с}} = 8{,}7\frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Завдання 9 (11 клас)

Альтаїр (α Орла) має річний паралакс $\pi = 0{,}198''$ його власний рух (переміщення по небесній сфері поперек променя зору за рік) $\mu = 0{,}658''$ μ=0,658", променева швидкість $v_r = -26\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$, блиск $0^m{,}89$. Коли і на яку найменшу відстань він наблизиться до Сонця? Яким буде його блиск в той час?

Розв’язок



Швидкість зорі можна розкласти на дві складові: вздовж променя зору v_r (променева швидкість) і перпендикулярну йому v_t. Перша з них задана в умові: $v_r = -26\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$ (знак "–" вказує, що вона направлена до нас). Друга складова може бути визначена за власним рухом зорі.

За річним паралаксом (вираженим у кутових секундах) можна визначити відстань до зорі: $r = \frac{1}{\pi''} = \frac{1}{0{,}198} \approx 5{,}05$ пс.

Переміщення зорі за рік в просторі $S = \mu r$, де кут μ в радіанах. Оскільки в умові кут заданий в кутових секундах, одержимо: $S = \frac{\mu''}{206265} \cdot r$.

Складову швидкості поперек променя зору визначимо, врахувавши, що це переміщення зоря здійснює за час t_0=1 рік: $v_t = \frac{S}{t_0} = \frac{\mu'' \cdot r}{206265 t_0}$

Враховуючи, що 1 пс=206265 а.о., одержимо $v_t \approx 15{,}8\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$ (можна відразу скористатися формулою: $v_t = 4{,}74 \frac{\mu}{\pi} \frac{\text{км}}{\text{с}}$).

Повна швидкість зорі направлена під кутом до променя зору і може бути знайдена за теоремою Піфагора: $v = \sqrt{{v_r}^2 + {v_t}^2} \approx 30{,}4 \frac{\text{км}}{\text{с}}$.

Мінімальна віддаль, на яку наблизиться зоря, дорівнює довжині відрізка BC. Оскільки трикутник, побудований на векторах швидкостей, подібний трикутнику ABC (вони обидва прямокутні з однаковим гострим кутом), з подібності трикутників одержимо:

$\frac{BC}{AC} = \frac{v_t}{v}$, $r_{min} = BC = \frac{v_t}{v} \cdot AC = \frac{v_t}{v} \cdot r \approx 2{,}6$ пс.

Аналогічно знаходимо шлях, який проходить зоря до максимального зближення $\mathrm{A}B = L$: $\frac{\mathrm{AB}}{AC} = \frac{v_r}{v}$, $L = AB = \frac{v_r}{v} \cdot AC = \frac{v_r}{v} \cdot r \approx 4{,}3$ пс.

Час руху до зближення $t = \frac{L}{v} \approx 1{,}4 \cdot 10^5$ років $= 140$ тис. років.

Запишемо вираз для зоряної величини у ці моменти часу:

$$m = M - 5 + 5lgr$$

$m_{max} = M - 5 + 5lgr_{min}$, де M – абсолютна зоряна величина зорі.

Віднімаючи ці рівності, одержимо:

$$m_{max} - m = 5lgr_{min} - 5lgr = 5lg\frac{r_{min}}{r},$$

$$m_{max} = m + 5lg\frac{r_{min}}{r} = 0^m,89 + 5lg\frac{2,6}{5,05} \approx -0^m,55.$$