

## **11 клас (ВР)**

**1.** Знайдіть найбільше дев'ятицифрове натуральне число, що задовольняє умови: усі його цифри різні, кожен дві сусідні цифри числа відрізняються не менше ніж на 2 та воно кратне 3.

**2.** Добуток трьох чисел  $\overline{abc} \cdot \overline{bca} \cdot \overline{cab} = 3*****1$  є восьмицифровим числом з першою цифрою 3 та останньою цифрою 1. Цифри  $a, b, c$  попарно різні. Чому може дорівнювати цей добуток? Наведіть усі можливі відповіді.

**3.** Доведіть, що при будь-якому значенні параметру  $a$  рівняння

$$x^4 + a^2x^3 + 2ax^2 + 3a^2x + a - 1 = 0$$

має принаймні один дійсний розв'язок.

**4.** У чемпіонаті з гандболу взяли участь 8 команд. За перемогу нараховується 2 очки, за нічию – 1 очко, за поразку очок не нараховується. Чемпіонат проходив в одне коло, тобто кожна команда зіграла з кожною рівно один раз. При цьому грали кожного дня по турах, тобто у кожному турі грали усі команди, що були розбиті на пари. Після туру публікувалася таблиця, де команди розставлялися по місцях (з 1-го по 8-е) відповідно набраних очок. Команди, що на даний момент або наприкінці турніру набрали однакову кількість очок, розподіляються по місцях по додаткових показниках (особиста зустріч, різниця м'ячів тощо). В деякий момент після чергового туру виявилось, що усі команди набрали різну кількість очок. Яке найвище місце зможе наприкінці чемпіонату посісти команда, що у той момент була на 8-му місці?

**5.** У гострокутному нерівнобедреному трикутнику  $ABC$  проведені висоти  $BB_1$  та  $CC_1$ , які перетинаються в точці  $H$ . Нехай  $L_1$  та  $L_2$  основи бісектрис трикутників  $B_1AC_1$  та  $B_1HC_1$ , що проведені з вершин  $A$  та  $H$  відповідно. Описані кола трикутників  $AHL_1$  та  $AHL_2$  вдруге перетинають пряму  $B_1C_1$  у точках  $P$  та  $Q$  відповідно. Доведіть, що точки  $B, C, P$  та  $Q$  лежать на одному колі.

15 січня 2017 р.

На виконання завдання відводиться 4 години  
Кожна задача оцінюється в 7 балів

**Подальша інформація про олімпіаду буде наведена на сайті**

**[www.matholymp.com.ua](http://www.matholymp.com.ua)**

## **11 клас (ВР)**

**1.** Знайдіть найбільше дев'ятицифрове натуральне число, що задовольняє умови: усі його цифри різні, кожен дві сусідні цифри числа відрізняються не менше ніж на 2 та воно кратне 3.

**2.** Добуток трьох чисел  $\overline{abc} \cdot \overline{bca} \cdot \overline{cab} = 3*****1$  є восьмицифровим числом з першою цифрою 3 та останньою цифрою 1. Цифри  $a, b, c$  попарно різні. Чому може дорівнювати цей добуток? Наведіть усі можливі відповіді.

**3.** Доведіть, що при будь-якому значенні параметру  $a$  рівняння

$$x^4 + a^2x^3 + 2ax^2 + 3a^2x + a - 1 = 0$$

має принаймні один дійсний розв'язок.

**4.** У чемпіонаті з гандболу взяли участь 8 команд. За перемогу нараховується 2 очки, за нічию – 1 очко, за поразку очок не нараховується. Чемпіонат проходив в одне коло, тобто кожна команда зіграла з кожною рівно один раз. При цьому грали кожного дня по турах, тобто у кожному турі грали усі команди, що були розбиті на пари. Після туру публікувалася таблиця, де команди розставлялися по місцях (з 1-го по 8-е) відповідно набраних очок. Команди, що на даний момент або наприкінці турніру набрали однакову кількість очок, розподіляються по місцях по додаткових показниках (особиста зустріч, різниця м'ячів тощо). В деякий момент після чергового туру виявилось, що усі команди набрали різну кількість очок. Яке найвище місце зможе наприкінці чемпіонату посісти команда, що у той момент була на 8-му місці?

**5.** У гострокутному нерівнобедреному трикутнику  $ABC$  проведені висоти  $BB_1$  та  $CC_1$ , які перетинаються в точці  $H$ . Нехай  $L_1$  та  $L_2$  основи бісектрис трикутників  $B_1AC_1$  та  $B_1HC_1$ , що проведені з вершин  $A$  та  $H$  відповідно. Описані кола трикутників  $AHL_1$  та  $AHL_2$  вдруге перетинають пряму  $B_1C_1$  у точках  $P$  та  $Q$  відповідно. Доведіть, що точки  $B, C, P$  та  $Q$  лежать на одному колі.

15 січня 2017 р.

На виконання завдання відводиться 4 години  
Кожна задача оцінюється в 7 балів

**Подальша інформація про олімпіаду буде наведена на сайті**

**[www.matholymp.com.ua](http://www.matholymp.com.ua)**