Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2016-2017 рік

10 клас (ВР)

1. Знайдіть найбільше дев'ятицифрове натуральне число, що задовольняє умови: усі його цифри різні, кожні дві сусідні цифри числа відрізняються не менше ніж на 2 та воно кратне 3.

2. У чемпіонаті взяли участь 8 команд. Чемпіонат проходив в одне коло, тобто кожна команда зіграла з кожною рівно один раз. При цьому грали кожного дня по турах, тобто у кожному турі грали усі команди, що були розбиті на пари. Після туру публікувалася таблиця, де команди розставлялися по місцях (з 1-го по 8-е) відповідно набраних очок. Після якого туру найшвидше може виявитись, що усі команди набрали різну кількість очок, якщо:

а) це був чемпіонат з баскетболу, де за перемогу нараховується 1 очко, за поразку очок не нараховується, а нічиїх не буває.

б) це був чемпіонат з футболу, де за перемогу нараховується 3 очки, за нічию – 1 очко, за поразку очок не нараховується.

3. Заданий квадрат $ABCD$. Нехай точка M – середина сторони BC, а H – основа перпендикуляра з вершини C на відрізок DM. Доведіть, що $AB = AH$.

4. Є набір з десяти карток, на яких записано по одній цифрі $0; 1; \ldots; 9$. Андрій та Олеся по черзі (розпочинає Андрій) вибирають по одній картці та складають їх послідовно зліва направо так, що у кожного утворюється пятицифрове число (картку з цифрою 0 на своєму першому кроці жоден з гравців вибирати не може). Андрій перемагає у цій грі, якщо число, яке утворилося у нього, ділиться націло на 6. Інакше перемагає Олеся. Кожен з гравців прагне перемогти. Хто за таких умов може забезпечити собі перемогу?

5. Для довільних додатних чисел x, y, z доведіть нерівність

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{y+x} \geq \frac{(3x-y-z)^2}{2(x+y+z)}.$$

15 січня 2017 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Подальша інформація про олімпіаду буде наведена на сайті
www.matholymp.com.ua

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2016-2017 рік

10 клас (ВР)

1. Знайдіть найбільше дев'ятицифрове натуральне число, що задовольняє умови: усі його цифри різні, кожні дві сусідні цифри числа відрізняються не менше ніж на 2 та воно кратне 3.

2. У чемпіонаті взяли участь 8 команд. Чемпіонат проходив в одне коло, тобто кожна команда зіграла з кожною рівно один раз. При цьому грали кожного дня по турах, тобто у кожному турі грали усі команди, що були розбиті на пари. Після туру публікувалася таблиця, де команди розставлялися по місцях (з 1-го по 8-е) відповідно набраних очок. Після якого туру найшвидше може виявитись, що усі команди набрали різну кількість очок, якщо:

а) це був чемпіонат з баскетболу, де за перемогу нараховується 1 очко, за поразку очок не нараховується, а нічиїх не буває.

б) це був чемпіонат з футболу, де за перемогу нараховується 3 очки, за нічию – 1 очко, за поразку очок не нараховується.

3. Заданий квадрат $ABCD$. Нехай точка M – середина сторони BC, а H – основа перпендикуляра з вершини C на відрізок DM. Доведіть, що $AB = AH$.

4. Є набір з десяти карток, на яких записано по одній цифрі $0; 1; \ldots; 9$. Андрій та Олеся по черзі (розпочинає Андрій) вибирають по одній картці та складають їх послідовно зліва направо так, що у кожного утворюється пятицифрове число (картку з цифрою 0 на своєму першому кроці жоден з гравців вибирати не може). Андрій перемагає у цій грі, якщо число, яке утворилося у нього, ділиться націло на 6. Інакше перемагає Олеся. Кожен з гравців прагне перемогти. Хто за таких умов може забезпечити собі перемогу?

5. Для довільних додатних чисел x, y, z доведіть нерівність

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{y+x}\geq\frac{(3x-y-z)^2}{2(x+y+z)}.$$

15 січня 2017 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Подальша інформація про олімпіаду буде наведена на сайті
www.matholymp.com.ua