Розв’язки завдань III етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з астрономії

11 клас

1. У Сумах (φ = 50°55′) в деякий день опівдні Сонце спостерігалося на висоті 62°32′. Визначте схилення Сонця і дату спостереження.

Розв’язок

Висота Сонця опівдні (в верхній кульмінації)

$h_в = 90° - \varphi + \delta_\odot$,

де φ – широта місця спостереження,

$\delta_\odot$ – схилення Сонця.

Звідси знаходимо:

$\delta_\odot = h_в + \varphi - 90° = 62°32' + 50°55' - 90° = 23°27'$.

Таке схилення Сонця в день літнього сонцестояння, тобто дата спостереження 21 червня.

2. З якої планети Сонячної системи можна побачити неозброєним оком супутники двох сусідніх планет? Відповідь обґрунтуйте.

Розв’язок

У планети повинно бути дві сусідні планети. Тому Меркурій та Нептун виключаються. Крім того, у сусідніх планет повинні бути супутники. Отже, це не Венера (бо у Меркурія супутників немає) і не Земля (у Венери теж немає супутників).

Для спостереження неозброєним оком супутник повинен бути досить великим. Тому як супутники-претенденти розглядаємо Місяць, Галілеєві супутники Юпітера, супутник Сатурна Титан і Нептуна Тритон. Супутники Марса з Юпітера побачити не можна (оскільки їх не видно і з Землі, яка ближче до Марса), в Урана досить великих супутників немає. Тому Юпітер (сусідні Марс і Сатурн) та Сатурн (сусідні планети Юпітер та Уран) також виключаються.

Залишається дві планети: Марс і Уран.

Чим ближче планета до Сонця, тим яскравіші її супутники. Радіуси орбіт планет із збільшенням порядкового номера планети дуже швидко ростуть, тому й мінімальні відстані між сусідніми планетами теж збільшуються з віддаленням від Сонця. Крім того, Тритон – найменший серед великих супутників, і побачити його з Урана було б складно. Отже, шуканою планетою є Марс, з якого неозброєним оком видно Місяць біля Землі та Галілеєві супутники Юпітера.

3. У подвійної зірки річний паралакс становить 0,05", велика піввісь видимої орбіти дорівнює 2,0", а період обертання компонентів 100 років. Знайдіть суму мас зірок і масу кожної зірки, якщо зірки знаходяться від центру мас на відстанях, які відносяться як 4:1.

Розв’язок

За річним паралаксом знаходимо відстань до зірки:

$r = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{0{,}05''} = 20\ \text{пк} = 20 \cdot 206265\ \text{а.о.}$.

Знаючи відстань та кутовий розмір великої півосі, знаходимо її лінійний розмір:

$a = r \cdot \alpha = 20 \cdot 206265\text{а.о.} \cdot \frac{2''}{206265''} = 40\ \text{а.о.}$

Для знаходження суми мас зірок використовуємо узагальнений третій закон Кеплера, порівнюючи рух зірок навколо спільного центру мас з рухом Землі навколо Сонця:

$\frac{T^2(M_1+M_2)}{a^3} = \frac{T_0^2(M_\odot+M_\oplus)}{a_0^3}$,

звідки, нехтуючи масою Землі порівняно з масою Сонця і враховуючи параметри руху Землі (a_0=1 а.о., T_0=1 рік), знаходимо:

$M_1 + M_2 = \frac{T_0^2 a^3}{T^2 a_0^3} M_\odot = \frac{1^2 \cdot 40^3}{100^2 \cdot 1^3} M_\odot = 6{,}4 M_\odot$.

Відношення відстаней зірок від центру мас обернено пропорційне їх масам:

$\frac{M_1}{M_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{4}$,

звідки

$M_2 = 4M_1$,

$M_1 + M_2 = M_1 + 4M_1 = 5M_1 = 6{,}4M_\odot$,

$M_1 = \frac{6{,}4}{5} M_\odot = 1{,}28 M_\odot$,

$M_2 = 4M_1 = 4 \cdot 1{,}28 M_\odot = 5{,}12 M_\odot$.

4. Подвійна система складається з двох зір однакових розмірів, але їх температура відрізняється в 2 рази. Визначте амплітуду зміни зоряної величини, якщо нахил орбіти відсутній. В скільки разів при цьому змінюється блиск системи? Зобразіть схематично криву блиску.

Розв’язок

Світність зорі ***L*** пропорційна $T^4 \cdot R^2$ (або може бути знайдена з використанням закону Стефана-Больцмана: $L = \varepsilon S = \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2$), звідки для відношення світностей маємо:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{T_2^4 \cdot R_2^2}{T_1^4 \cdot R_1^2} = \frac{T_2^4}{T_1^4} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = 2^4 = 16$$

(розміри зір за умовою однакові).

Оскільки відстані від спостерігача до обох зір однакові, їх блиски також відрізняються в 16 разів:

$\frac{E_2}{E_1} = 16$.

Сумарний блиск затемнювано-змінної зорі в максимумі буде дорівнювати сумі блисків:

$E_{max} = E_1 + E_2 = E_1 + 16E_1 = 17E_1$.

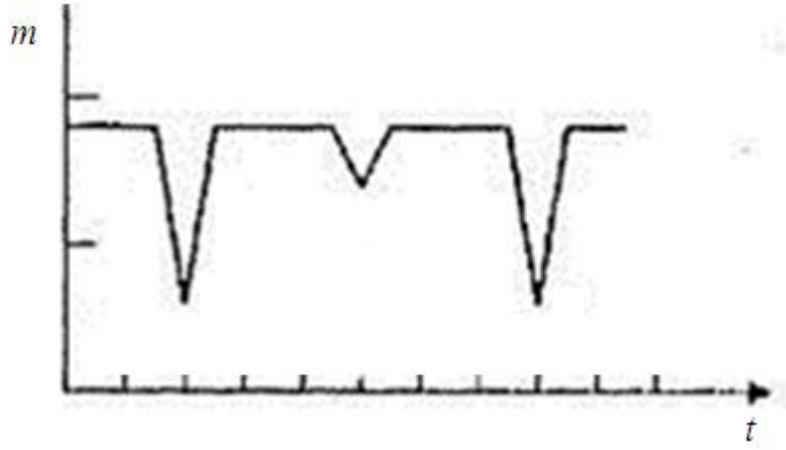
В мінімумі блиску яскравий компонент повністю невидимий,

$E_{min} = E_1$.

Отже, блиск системи змінюється в 17 разів. Тоді згідно з формулою Погсона

$$\Delta m = m_{max} - m_{min} = -2{,}5 lg \frac{E_{max}}{E_{min}} = -2{,}5 \cdot lg 17 = -3{,}1^m.$$

Між двома основними мінумумами блиску буде спостерігатись додатковий мінімум малої глибини (він відповідає проміжку, коли менш яскравий компонент невидимий за яскравішим). Графік зміни блиску схематично має вигляд:



5. Проникна сила телескопа 19^m. Чи можна з його допомогою зареєструвати кульове скупчення із мільйона зір подібних Сонцю, що знаходяться в сусідній галактиці на відстані 10 Мпк?

Розв'язок.

За формулою Погсона

$$lg \frac{E_c}{E_\odot} = 0{,}4(M_\odot - M_c),$$

де E_c, M_c – блиск і абсолютна зоряна величина скупчення,

$E_\odot$, $M_\odot$ – те ж для Сонця.

Світність скупчення

$E_c = 10^6 E_\odot$.

Абсолютна зоряна величина Сонця $M_\odot \approx 5^m$, тоді

$$M_\odot - M_c = 2{,}5 lg \frac{E_c}{E_\odot},$$

$$M_c = M_\odot - 2{,}5 lg \frac{E_c}{E_\odot} = 5 - 2{,}5 lg\, 10^6 = 5 - 15 = -10^m.$$

Зв'язок видимої і абсолютної зоряних величин скупчення:

$$M_c = m + 5 - 5 \lg r,$$

де r – відстань до скупчення в парсеках. Звідси

$$m = M_c - 5 + 5 \lg r = -10 - 5 + 5 \lg 10^7 = 20^m,$$

отже, скупчення в телескоп не видно.

6. Оцініть густину чорної діри в центрі Галактики, якщо відомо, що навколо неї з періодом 15,2 року обертається зірка з еліптичною орбітою, яка має велику піввісь, що дорівнює 5,5 світлових діб.

Розв'язок

Запишемо узагальнений третій закон Кеплера,

$$\frac{T^2(M+m_з)}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G}.$$

Нехтуючи масою зорі порівняно з масою чорної діри, одержимо:

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}.$$

Радіус чорної діри знаходимо з умови, що друга космічна швидкість на її поверхні дорівнює швидкості світла:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = c,$$

звідки

$$\frac{2GM}{R} = c^2,$$

$$R = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2G}{c^2} \cdot \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} = \frac{8\pi^2 a^3}{c^2 T^2}.$$

Вважаючи діру сферичною, знаходимо її об'єм:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{8G^3M^3}{c^6} = \frac{32\pi G^3 M^3}{3c^6}.$$

Густина речовини чорної діри

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{32\pi G^3 M^3}{3c^6}} = \frac{3c^6}{32\pi G^3 M^2} = \frac{3c^6}{32\pi G^3 \cdot \frac{16\pi^4 a^6}{G^2 T^4}} = \frac{3c^6 T^4}{512\pi^5 a^6 G}.$$

Враховуючи, що

T=15,2 року=4,80·10^8 секунд,

a=5,5·24·3600·c≈4,75·10^5·c (м, в цьому виразі c – швидкість світла),

знаходимо:

$$\rho = \frac{3c^6 \cdot 4{,}80^4 \cdot 10^{32}}{512 \cdot 3{,}14^5 \cdot 4{,}75^6 \cdot 10^{30} \cdot c^6 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}} \approx 1{,}3 \cdot 10^6 \text{ (кг/м}^3\text{)}$$