

10 клас (високий рівень)

0. Скільки діагоналей має опуклий шестикутник:

а) 9; **б)** 2019; **в)** 2020; **г)** 2021?

(В роботі треба написати лише пункт вірної відповіді без пояснень)

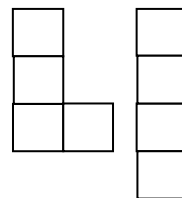
1. Чи існують попарно різні натуральні числа a , b та c , для яких

$$\left\{ \left\{ \frac{a}{b} \right\} + \left\{ \frac{b}{c} \right\} + \left\{ \frac{c}{a} \right\} \right\} = 0? \text{ Дроби не обов'язково мають бути нескоротними.}$$

Тут через $\{x\}$ позначена різниця між числом x та найбільшим цілим числом, що не перевищує x , наприклад, $\left\{ \frac{7}{5} \right\} = \frac{2}{5}$, $\left\{ \frac{2019}{3} \right\} = 0$ та $\left\{ \frac{2020}{3} \right\} = \frac{1}{3}$.

2. Доведіть, що серед чисел 1, 2, ..., 10000 можна вибрати 7 чисел, які не є квадратами натуральних чисел, так, щоб не можна було з цих 7 чисел вибрати декілька, сума яких була б квадратом натурального числа.

3. Чи можна непарною кількістю L -тетраміно і деякою кількістю прямих тетраміно (рис.) замостити деякий прямокутник? Тетраміно не можуть виходити за межі прямокутника, кожна клітинка прямокутника має бути покрита рівно одним тетраміно.



4. Для додатних чисел a, b, c доведіть нерівність:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} + 6 \geq 9 \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}.$$

5. Дано гострокутний нерівнобедрений трикутник ABC , AK та CN – його бісектриси, I – їх точка перетину. Нехай точка X – друга точка перетину кіл, описаних навколо $\triangle ABC$ та $\triangle KBN$. Нехай M – середина сторони AC . Доведіть, що пряма Ейлера $\triangle ABC$ перпендикулярна прямій BI тоді і тільки тоді, коли точки X , I , та M лежать на одній прямій.

Прямою Ейлера у нерівносторонньому трикутнику називається пряма, що проходить через точку перетину висот, точку перетину медіан та центр описаного кола трикутника.

19 січня 2020 р.

10 клас (високий рівень)

0. Скільки діагоналей має опуклий шестикутник:

а) 9; **б)** 2019; **в)** 2020; **г)** 2021?

(В роботі треба написати лише пункт вірної відповіді без пояснень)

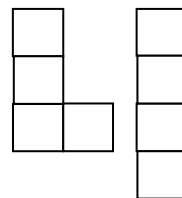
1. Чи існують попарно різні натуральні числа a , b та c , для яких

$$\left\{ \left\{ \frac{a}{b} \right\} + \left\{ \frac{b}{c} \right\} + \left\{ \frac{c}{a} \right\} \right\} = 0? \text{ Дроби не обов'язково мають бути нескоротними.}$$

Тут через $\{x\}$ позначена різниця між числом x та найбільшим цілим числом, що не перевищує x , наприклад, $\left\{ \frac{7}{5} \right\} = \frac{2}{5}$, $\left\{ \frac{2019}{3} \right\} = 0$ та $\left\{ \frac{2020}{3} \right\} = \frac{1}{3}$.

2. Доведіть, що серед чисел 1, 2, ..., 10000 можна вибрати 7 чисел, які не є квадратами натуральних чисел, так, щоб не можна було з цих 7 чисел вибрати декілька, сума яких була б квадратом натурального числа.

3. Чи можна непарною кількістю L -тетраміно і деякою кількістю прямих тетраміно (рис.) замостити деякий прямокутник? Тетраміно не можуть виходити за межі прямокутника, кожна клітинка прямокутника має бути покрита рівно одним тетраміно.



4. Для додатних чисел a , b , c доведіть нерівність:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} + 6 \geq 9 \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}.$$

5. Дано гострокутний нерівнобедрений трикутник ABC , AK та CN – його бісектриси, I – їх точка перетину. Нехай точка X – друга точка перетину кіл, описаних навколо $\triangle ABC$ та $\triangle KBN$. Нехай M – середина сторони AC . Доведіть, що пряма Ейлера $\triangle ABC$ перпендикулярна прямій BI тоді і тільки тоді, коли точки X , I , та M лежать на одній прямій.

Прямою Ейлера у нерівносторонньому трикутнику називається пряма, що проходить через точку перетину висот, точку перетину медіан та центр описаного кола трикутника.

19 січня 2020 р.