

11 клас (високий рівень)

0. Скільки граней має правильна трикутна призма:

а) 5; б) 2019; в) 2020; г) 2021?

(В роботі треба написати лише пункт вірної відповіді без пояснень)

1. З'ясуйте, яке з чисел більше 2 чи $tg 1$?

2. Доведіть, що серед чисел 1, 2, ..., 10000 можна вибрати 8 чисел, які не є квадратами натуральних чисел, так, щоб не можна було з цих 8 чисел вибрати декілька, сума яких була б квадратом натурального числа.

3. Заданий білий квадрат $ABCD$ завбільшки 8×8 , що складається з 64 одиничних квадратиків (клітинок) 1×1 . За одну дію можна вибрати будь-який

а) квадрат; б) прямокутник,

що складається з цілої кількості одиничних квадратиків і містить принаймні одну з вершин квадрату $ABCD$, та поміняти в ньому колір кожної клітинки на протилежний (білий замінюється на чорний та навпаки). Чи можна за допомогою таких дій отримати довільне розфарбування клітин квадрату $ABCD$?

4. Дано гострокутний нерівнобедрений трикутник ABC , AK та CN – його бісектриси, I – їх точка перетину. Нехай точка X – друга точка перетину кіл описаних навколо $\triangle ABC$ та $\triangle KBN$. Нехай M – середина сторони AC . Доведіть, що пряма Ейлера $\triangle ABC$ перпендикулярна прямій BI тоді і тільки тоді, коли точки X , I , та M – лежать на одній прямій.

Прямою Ейлера у нерівносторонньому трикутнику називається пряма, що проходить через точку перетину висот, точку перетину медіан та центр описаного кола трикутника.

5. Для додатних чисел a, b, c , що задовольняють умову $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$, доведіть нерівність

$$(4 - a^2)(4 - b^2)(4 - c^2)a^2b^2c^2 \leq (2a + bc)(2b + ca)(2c + ab).$$

19 січня 2020 р.

11 клас (високий рівень)

0. Скільки граней має правильна трикутна призма:

а) 5; б) 2019; в) 2020; г) 2021?

(В роботі треба написати лише пункт вірної відповіді без пояснень)

1. З'ясуйте, яке з чисел більше 2 чи $\lg 1$?

2. Доведіть, що серед чисел 1, 2, ..., 10000 можна вибрати 8 чисел, які не є квадратами натуральних чисел, так, щоб не можна було з цих 8 чисел вибрати декілька, сума яких була б квадратом натурального числа.

3. Заданий білий квадрат $ABCD$ завбільшки 8×8 , що складається з 64 одиничних квадратиків (клітинок) 1×1 . За одну дію можна вибрати будь-який

а) квадрат; б) прямокутник,

що складається з цілої кількості одиничних квадратиків і містить принаймні одну з вершин квадрату $ABCD$, та поміняти в ньому колір кожної клітинки на протилежний (білий замінюється на чорний та навпаки). Чи можна за допомогою таких дій отримати довільне розфарбування клітин квадрату $ABCD$?

4. Дано гострокутний нерівнобедрений трикутник ABC , AK та CN – його бісектриси, I – їх точка перетину. Нехай точка X – друга точка перетину кіл описаних навколо $\triangle ABC$ та $\triangle KBN$. Нехай M – середина сторони AC . Доведіть, що пряма Ейлера $\triangle ABC$ перпендикулярна прямій BI тоді і тільки тоді, коли точки X , I , та M – лежать на одній прямій.

Прямою Ейлера у нерівносторонньому трикутнику називається пряма, що проходить через точку перетину висот, точку перетину медіан та центр описаного кола трикутника.

5. Для додатних чисел a, b, c , що задовольняють умову $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$, доведіть нерівність

$$(4 - a^2)(4 - b^2)(4 - c^2)a^2b^2c^2 \leq (2a + bc)(2b + ca)(2c + ab).$$

19 січня 2020 р.