Міністерство освіти і науки України
Інститут модернізації змісту освіти
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2019-2020 рік

9 клас (високий рівень)

0. Медіани трикутника в точці перетину, рахуючи від вершини, діляться у відношенні

а) $2:1$; *б)* $2019:2020$; *в)* $2021:2020$; *г)* $2020:2019$?

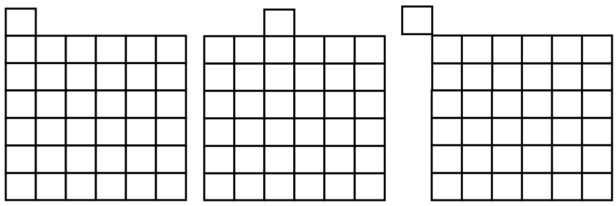
(В роботі треба написати лише пункт вірної відповіді без пояснень)

1. Доведіть, що не існує різних натуральних чисел a і b, для яких $\left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}+\left\{\frac{b}{a}\right\}\right\}=0$.

Тут через $\{x\}$ *позначена різниця між числом* x *та найбільшим цілим числом, що не перевищує* x*, наприклад,* $\left\{\frac{7}{5}\right\}=\frac{2}{5}$, $\left\{\frac{2019}{3}\right\}=0$ *та* $\left\{\frac{2020}{3}\right\}=\frac{1}{3}$.

2. Задане деяке просте число $p>2$. По колу стоять N людей, кожний з яких задумав деяке натуральне число, а далі на своєму папірці написав остачу від ділення свого числа на p. Далі кожний подивився на записане на папірці число сусіда справа, розглянув добуток свого записаного числа та підглянутого числа сусіда та на своєму папірці написав друге число, що дорівнює остачі від ділення обчисленого добутку на p. Яке максимальне значення може приймати N, якщо усі перші числа в усіх людей різні, а крім того у кожного на папірці записані два різних числа?

3. Назвемо *квазіквадратом* фігуру, що складається з квадрату $n\times n$, $n\geq 4$, до якої зовні приєднано ще один квадратик 1×1, що має спільну сторону з одним з квадратів квадрату $n\times n$. Так на рис. дві перші фігурки є квазіквадратами, третя – ні. Чи завжди можна такими однаковими квазіквадратами покрити усю площину? Квазіквадрати не мають накладатися один на інший, але їх можна повертати та перегортати.



4. Нехай точка D лежить на дузі AC описаного кола трикутника ABC ($AB<BC$), що не містить точку B. На стороні AC вибрані довільна точка X та точка X', для якої $\angle ABX=\angle CBX'$. Доведіть, що незалежно від вибору точки X, коло, яке описане навколо $\Delta DXX'$, проходить через фіксовану точку, що відмінна від точки D.

5. Для додатних чисел a, b, c доведіть нерівність: $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+6\geq 9\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$.

19 січня 2020 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Міністерство освіти і науки України
Інститут модернізації змісту освіти
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2019-2020 рік

9 клас (високий рівень)

0. Медіани трикутника в точці перетину, рахуючи від вершини, діляться у відношенні

а) $2:1$; *б)* $2019:2020$; *в)* $2021:2020$; *г)* $2020:2019$?

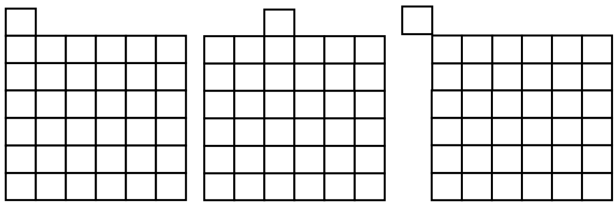
(В роботі треба написати лише пункт вірної відповіді без пояснень)

1. Доведіть, що не існує різних натуральних чисел a і b, для яких $\left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}+\left\{\frac{b}{a}\right\}\right\}=0$.

Тут через $\{x\}$ *позначена різниця між числом* x *та найбільшим цілим числом, що не перевищує* x*, наприклад,* $\left\{\frac{7}{5}\right\}=\frac{2}{5}$, $\left\{\frac{2019}{3}\right\}=0$ *та* $\left\{\frac{2020}{3}\right\}=\frac{1}{3}$.

2. Задане деяке просте число $p>2$. По колу стоять N людей, кожний з яких задумав деяке натуральне число, а далі на своєму папірці написав остачу від ділення свого числа на p. Далі кожний подивився на записане на папірці число сусіда справа, розглянув добуток свого записаного числа та підглянутого числа сусіда та на своєму папірці написав друге число, що дорівнює остачі від ділення обчисленого добутку на p. Яке максимальне значення може приймати N, якщо усі перші числа в усіх людей різні, а крім того у кожного на папірці записані два різних числа?

3. Назвемо *квазіквадратом* фігуру, що складається з квадрату $n\times n$, $n\geq 4$, до якої зовні приєднано ще один квадратик 1×1, що має спільну сторону з одним з квадратів квадрату $n\times n$. Так на рис. дві перші фігурки є квазіквадратами, третя – ні. Чи завжди можна такими однаковими квазіквадратами покрити усю площину? Квазіквадрати не мають накладатися один на інший, але їх можна повертати та перегортати.



4. Нехай точка D лежить на дузі AC описаного кола трикутника ABC ($AB<BC$), що не містить точку B. На стороні AC вибрані довільна точка X та точка X', для якої $\angle ABX=\angle CBX'$. Доведіть, що незалежно від вибору точки X, коло, яке описане навколо $\Delta DXX'$, проходить через фіксовану точку, що відмінна від точки D.

5. Для додатних чисел a, b, c доведіть нерівність: $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+6\geq 9\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$.

19 січня 2020 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів