Задача 1 (8 клас)

Пасажир запізнився на потяг на 20 хв. Дізнавшись про це, пасажир відразу сів у таксі, щоб наздогнати потяг на наступній станції. Залізниця та автомобільна дорога прокладені поруч. Таксі обігнало потяг у той момент часу, коли він пройшов 2/3 відстані від вокзалу до наступної станції. Який час повинен чекати пасажир прибуття потяга на наступній станції? Уважайте, що обидва транспортні засоби рухались з постійними швидкостями.

Розв'язок

Розглянемо рух потяга та таксі на двох ділянках: перша – від вокзалу до місця обгону потягу таксі, яка має довжину $l_1 = \frac{2S}{3}$; друга – від місця обгону потягу таксі до наступної станції з довжиною $l_2 = \frac{S}{3}$.

Першу ділянку таксі проїде за час $t_1 = \frac{l_1}{v_т} = \frac{2S}{3v_т}$ (1), де $v_т$ – швидкість таксі, а потяг – $t_1 + t_2 = \frac{l_1}{v_п} = \frac{2S}{3v_п}$ (2), де t_2 – час запізнення пасажира, $v_п$ – швидкість потяга.

Підставимо вираз (1) у вираз (2): $\frac{2S}{3v_т} + t_2 = \frac{2S}{3v_п}$. Звідси $\frac{v_п}{v_т} = 1 - \frac{3v_п t_2}{2S}$ (3).

Другу ділянку таксі проїде за час $t_3 = \frac{l_2}{v_т} = \frac{S}{3v_т}$ (4), а потяг – $t_3 + t_4 = \frac{l_2}{v_п} = \frac{2S}{3v_п}$ (5), де t_4 – час, який має чекати пасажир прибуття поїзда до станції.

Підставимо вираз (4) у вираз (5): $\frac{S}{3v_т} + t_4 = \frac{2S}{3v_п}$. Звідси $\frac{v_п}{v_т} = 1 - \frac{3v_п t_4}{S}$ (6).

Прирівняємо вираз (3) та (6):

$$1 - \frac{3v_п t_2}{2S} = 1 - \frac{3v_п t_4}{S};$$

$$\frac{3v_п t_2}{2S} = \frac{3v_п t_4}{S}$$

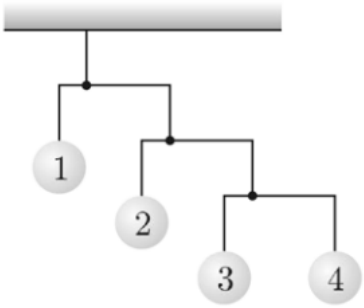
$$\frac{t_2}{2} = t_4.$$

Отже, пасажиру необхідно чекати прибуття потяга $t_4 = 10$ хв.

Задачу можна також розв'язати аналогічним способом, якщо зробити інший вибір ділянок руху потяга та таксі. Наприклад, від вокзалу до місця обгону потягу таксі та від вокзалу до наступної станції.

Задача 2 (8 клас)

На рисунку зображена підвісна іграшка, яка складається з горизонтальних стрижнів і прикріплених до них на нитках кульок. Визначте маси кульок з номерами 2, 3, 4, якщо маса кульки з номером 1 дорівнює 96 г. Короткі плечі всіх стрижнів дорівнюють ¼ від довжини відповідних стрижнів. Стрижні та нитки вважайте невагомими.



Розв'язок

Позначимо довжину стрижнів l.

На нижній стрижень діють три сили натягу ниток: на правий кінець діє сила тяжіння m_4g, направлена вниз, на лівий кінець – також направлена вниз сила тяжіння m_3g, а в точці підвісу – направлена вгору сила натягу нитки T_1.

Умова рівноваги нижнього стрижня відносно точки його кріплення до нитки:

$m_3\mathrm{g} \cdot \frac{1}{4} l = m_4\mathrm{g} \cdot \frac{3}{4} l.$

Звідси, $m_3 = 3m_4$.

Оскільки стрижень у рівновазі, то сила натягу нитки T_1 урівноважується силами тяжіння кульок 3 та 4: $T_1 = m_3\mathrm{g} + m_4\mathrm{g} = 3m_4\mathrm{g} + m_4\mathrm{g} = 4m_4\mathrm{g}$.

Аналогічним чином, записуємо умови рівноваги для середнього стержня, отримуємо, що $m_2 = 12m_4$, $T_2 = 16m_4\mathrm{g}$, де T_2 – сила натягу нитки, до якої прикріплено середній стрижень.

Для верхнього стрижня отримаємо, що $m_1\mathrm{g} = 3T_2 = 48m_4\mathrm{g}$. Звідси, $m_4 = \frac{m_1}{48} = \frac{96\text{ г}}{48} = 2$ г. Тоді $m_3 = 3m_4 = 6$ г, $m_2 = 12m_4 = 24$ г.

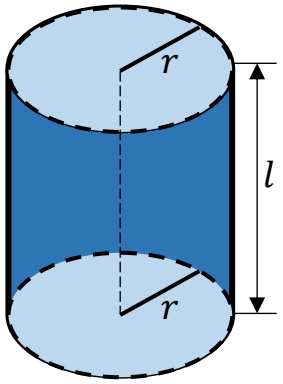
Задача 3 (8 клас)

Паличка «Бенгальського вогню» є тонким стрижнем радіусом $r = 1{,}0$ мм, який погано проводить тепло, укритий шаром горючої речовини товщиною $h = 1{,}0$ мм. Під час її горіння стрижень розігрівається до температури $t_1 = 900$°C. Якою може бути максимальна товщина шару горючої речовини, щоб стрижень не почав плавитися, якщо температура плавлення матеріалу стрижня $t_2 = 1580$°C? Уважайте, що частка втрат тепла в обох випадках однакова.

До відома.

Циліндр – це геометричне тіло, обмежене замкнутою циліндричною поверхнею та двома паралельними площинами, що перетинають її. Паралельні площини є основами циліндра та мають форму круга.

Об'єм циліндра розраховується як добуток площі його основи (S) на висоту (l): $V = Sl$.



r – радіус основи циліндра
l – висота циліндра

Розв'язок

У ситуації, описаній в умові задачі, відбувається поглинання тепла стрижнем, що виділяється під час горіння речовини, що укриває стрижень:

Якщо шар горючої речовини тонкий, то рівняння теплового балансу має вигляд:

$$\eta q m_1 = c m_2 (t_1 - t_0) \text{ (1)},$$

де m_1 – маса горючої речовини; q – його питома теплота згорання; c – питома теплоємність матеріалу стрижня; m_2 – маса частини стрижня, яка вкрита горючою речовиною та нагрівається під час горіння; η – частка теплоти, яка поглинулася частиною стрижня, укритою горючою речовиною; t_0 – початкова температура стрижня.

Якщо шар горючої речовини товстий, то рівняння теплового балансу має вигляд:

$$\eta q m_{\text{х}} = c m_2 (t_2 - t_0) \text{ (2)},$$

де $m_{\text{х}}$ – маса товстого шару горючої речовини.

Розділивши рівняння (2) на рівняння (1) та враховуючи, що $t_1 \gg t_0$ та $t_2 \gg t_0$, отримаємо: $\frac{m_{\text{х}}}{m_1} \approx \frac{t_2}{t_1}$ (3).

Маса шару горючої речовини визначимо як $m_{\text{х}} = \rho V$ (4).

Оскільки шар речовини має форму полого циліндра, то $V = V_{\text{ср}} - V_{\text{с}}$, де $V_{\text{ср}} = \pi (r + h_x)^2 \cdot l$ – об'єм частини стрижня з товстим шаром горючої речовини, $V_{\text{с}} = \pi r^2 l$ – об'єм частини стрижня, який укритий шаром речовини.

Отже, $V = \pi (r + h_x)^2 \cdot l - \pi r^2 l$ (5).

Підставимо вираз (5) у вираз (4) та отримаємо, що $m_{\text{х}} = \rho\pi[(r + h_x)^2 - r^2] l$ (6).

Маса тонкого шару горючої речовини визначимо аналогічно:

$$m_1 = \rho\pi[(r + h)^2 - r^2] l \text{ (7)}.$$

Підставимо вирази (6) та (7) у вираз (3):

$$\frac{\rho\pi[(r+h_x)^2 - r^2] l}{\rho\pi[(r+h)^2 - r^2] l} \approx \frac{t_2}{t_1};$$

$$\frac{(r+h_x)^2 - r^2}{(r+h)^2 - r^2} \approx \frac{t_2}{t_1}.$$

Звідси, $h_x = \sqrt{r^2 + \frac{t_2}{t_1} h(h + 2r)} - r = 1{,}5$ мм .

Задача 4 (8 клас)

Рівень води у човні збігається з рівнем води в озері. Як зміниться рівень води у човні по відношенню до рівня води в озері, якщо в човен кинути колоду?

Розв’язок

Під час занурення колоди у воду, човен зануриться в озеро, витіснивши додатково об’єм води $\Delta V = \frac{m}{\rho}$, де m – маса колоди, ρ – густина води. Але оскільки колода плаває у воді, то рівень води в човні повинен змінитися так само, як змінився б він під час доливання в човен води масою, що дорівнює масі колоди, і об’ємом, рівним об’єму зануреної частини колоди, тобто $V = \frac{m}{\rho}$. Можна подумки забрати колоду й заповнити впадину, яка утворилася, водою, - при цьому рівень води в човні не зміниться. Такий же об’єм води додатково витісняє човен при вкиданні в нього колоди. Тому рівень води в човні збігатиметься з рівнем води в озері, якщо товщина стінок човна мізерно мала, і буде трохи вищим за рівень води в озері, якщо стінки товсті.