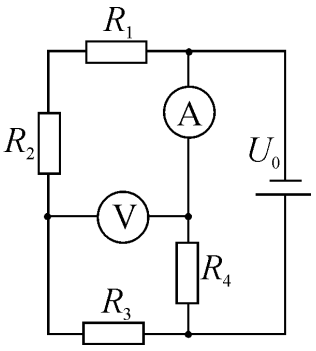
Задача 1 (10 клас)



На малюнку зображена схема електричного кола, що складається з джерела живлення, чотирьох резисторів з однаковим опором, ідеального вольтметра та ідеального амперметра. Покази вольтметра $U_{\text{В}} = 16$ В, амперметра – $I_{\text{А}} = 24$ мА. Визначити напругу джерела U_0 і опір резисторів.

Розв'язок

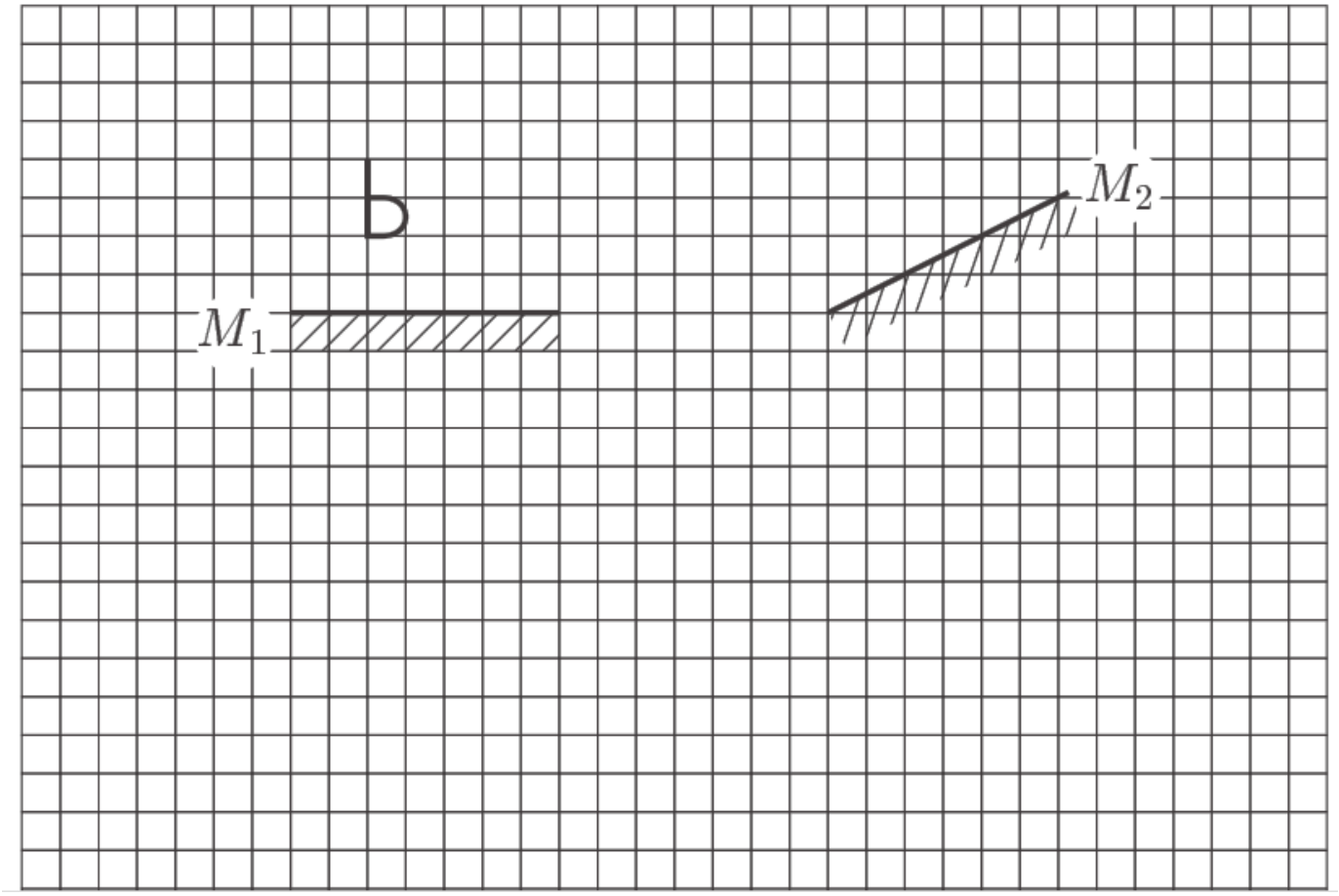
Оскільки вольтметр ідеальний, то струм через нього не йде і можемо його уявно з схеми вилучити. Амперметр ідеальний, його опір дорівнює нулю, отже на ньому напруга не падає і амперметр еквівалентний з'єднувальному провіднику. Тепер, проаналізувавши схему, бачимо, що до джерела живлення під'єднано дві паралельні вітки: перша ліва складається з з трьох послідовно з'єднаних резисторів R_1, R_2, R_3, друга права – з резистора R_4 і амперметра (якого можна не враховувати). Оскільки резистори однакові, опір кожного R, то опір лівої вітки $3R$, а правої R. Напруги на вітках однакові $U_0 = U_1 = U_2$. Отже $I_1 \cdot 3R = I_2 \cdot R$. Звідси

$I_1 = \frac{I_2}{3}$. З іншого боку $I_2 = I_{\text{А}} = 24$ мА, отже $I_1 = 8$ мА.

Вольтметр показує падіння напруги на резисторах R_1, R_2, через які іде струм I_1. Отже $U_V = 2I_1R$. Звідси $R = \frac{U_V}{2I_1} = 1000$ Ом. Тоді напруга джерела $U_0 = I_2 \cdot R = 24$ В.

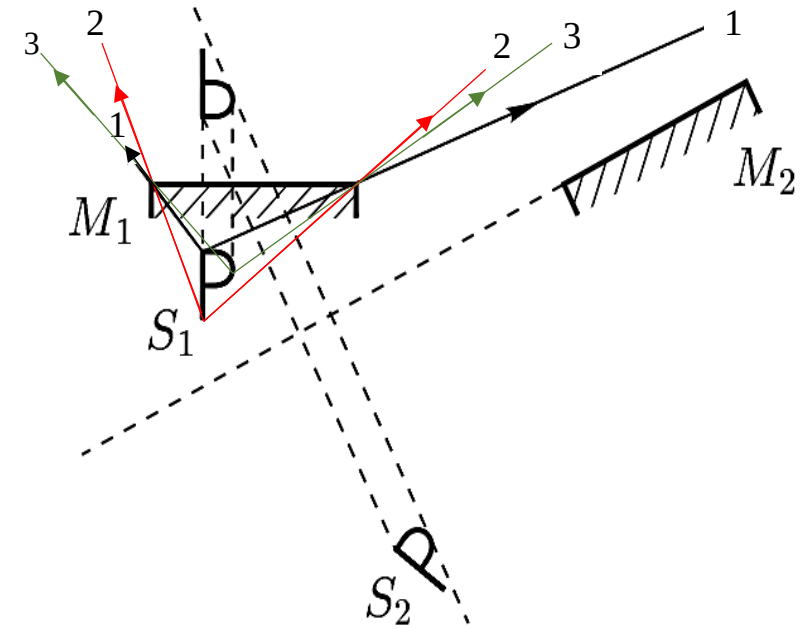
Задача 2 (10 клас)

Перед системою дзеркал М_1 та М_2 розташована буква Ь так, як показано на рисунку. Побудуйте на цьому ж малюнку всі зображення, створені даною системою. Доведіть, що інших зображень бути не може. Довжина кожного дзеркала дорівнює відстані між ними.



Розв’язок

Дзеркало M_1 створює уявне зображення букви Ь S_1, а дзеркало M_2 – S_2.



Зображення S_2 знаходиться з іншої сторони дзеркала M_1, тому дане дзеркало не може створювати додаткове зображення.

Для того, щоб оцінити, чи створиться додаткове зображення від зображення S_1 у дзеркалі M_2, визначимо область його видимості за допомогою побудови променів, які проходять через краї дзеркала M_1. Зображення буде

видиме в просторі, яке спільне для будь-яких двох променів від різних точок зображення S_1 зі сторони робочої поверхні дзеркала M_1. Область видимості зображення S_1 розміщена між червоними променями 2 (з інших областей між променями 1 та 2 зображення буде видно частково) зі сторони робочої поверхні дзеркала M_1.

Із побудови видно, що дзеркало M_2 не потрапляє в область видимості зображення S_1, тому зображення S_1 не створює додаткових зображень.

Отже, система має 2 зображення.

Задача 3 (10 клас)

У хлопчика, що сидить на каруселі, яка обертається з кутовою швидкістю ω, на відстані R від її осі, випали з кишені з інтервалом t два камінці. На якій відстані один від одного вдаряться об землю камінці, якщо висота, з якої вони впали, дорівнює h?

Розв'язок

Рух камінців можна розглядати як рух тіл, кинутих горизонтально з висоти h з однаковими швидкостями, рівними $v = \omega R$, та дотичними до колової траєкторії руху хлопчика радіусом R (рис. 1): $v_A = v_B = v$.

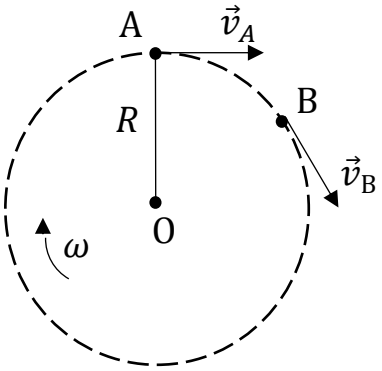


Рис. 1. Траєкторія руху хлопчина та напрям польоту камінців у початковий момент (вид зверху)

Камінці впадуть в точках A_1 та B_1 (рис. 2). Відповідно їх координати $A_1(X_1, Y_1)$ та $B_1(X_2, Y_2)$.

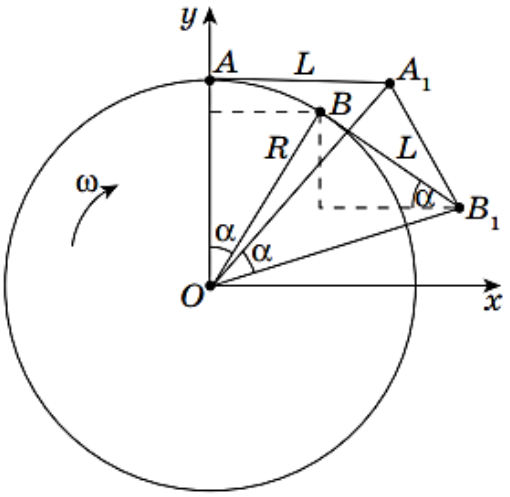


Рис. 2. Положення точок падіння камінців.

Відстань між точками падіння камінців можна визначити двома способами.

Спосіб 1.

$\mathrm{A_1B_1} = S = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$ (1).

Для визначення координат точок падіння врахуємо, що за час t карусель повернеться на кут $\alpha = \omega t$ та за час падіння $t_{\text{п}} = \sqrt{\frac{2h}{\mathrm{g}}}$ камінці пролетять однакову відстань $L = vt_{\text{п}} = \omega R\sqrt{\frac{2h}{\mathrm{g}}}$ (2).

Координати точки падіння першого камінця дорівнюватимуть $X_1 = L$, $Y_1 = R$; другого – $X_2 = R\sin\alpha + L\cos\alpha$, $Y_2 = R\cos\alpha - L\sin\alpha$.

Підставимо значення координат у вираз (1):

$$S = \sqrt{(R\sin\alpha + L\cos\alpha - L)^2 + (R\cos\alpha - L\sin\alpha - R)^2} =$$
$$= \sqrt{(R\sin\alpha + L(\cos\alpha - 1))^2 + (R(\cos\alpha - 1) - L\sin\alpha)^2} =$$
$$= \sqrt{R^2\sin^2\alpha + L^2(\cos\alpha - 1)^2 + R^2(\cos\alpha - 1)^2 + L^2\sin^2\alpha} =$$
$$= \sqrt{(R^2+L^2)\sin^2\alpha + (R^2+L^2)(\cos\alpha - 1)^2} =$$
$$= \sqrt{(R^2+L^2)(\sin^2\alpha + cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 1)} =$$
$$= \sqrt{2(R^2+L^2)(1 - \cos\alpha)} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{(R^2+L^2)}.$$

Відстань S також можна знайти іншим способом – як сторону рівнобедренного трикутника $\mathrm{OA_1B_1}$

$$S = 2\mathrm{OA_1}\sin\frac{\angle \mathrm{A_1OB_1}}{2} = 2\sqrt{(R^2+L^2)}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Підставивши відповідні значення, одержимо:

$$S = 2R\sin\frac{\omega t}{2}\sqrt{1 + \frac{2\omega^2 t}{\mathrm{g}}}$$

Задача 4 (10 клас)

У стакан з водою, температура якої t_1=20°C, опустили електронагрівач та включили його в мережу. Вода стала нагріватися з швидкістю $\mu_1 = 0{,}03\ \frac{°C}{хв}$. Але з часом швидкість μ зменшилася й вода нагрілася тільки до температури $t_2 = 80$ °C. Нагрівач вимкнули. Вода почала холонути з швидкістю $\mu_2 = 0{,}04\ \frac{°C}{хв}$. Чому дорівнює температура оточуючого середовища t_0? У скільки разів необхідно збільшити потужність електронагрівача, щоб довести воду до кипіння? Уважайте, що тепловіддача в оточуюче середовище пропорційна різниці температур тіла й середовища.

Розв'язок

Вода здійснює теплообмін з електронагрівника та навколишнім середовищем. Швидкість отримання кількості теплоти від нагрівника (швидкість тепловіддачі нагрівника або потужність нагрівника) μ_0 постійна. Швидкість віддачі кількості теплоти в навколишнє середовище $\mu_{ср}$ пропорційне різниці температур: $\mu_{ср} = k(t - t_0)$, де к – коєфіцієнт пропорційності, t – температура води. Тоді швидкість нагрівання води дорівнює $\mu = \mu_0 - \mu_{ср} = \mu_0 - k(t - t_0)$ (1).

За температури $t = t_2$ нагрівання припинилося. Отже, швидкість нагрівання води $\mu = 0$, а з рівняння (1) отримаємо швидкість тепловіддачі нагрівника

$\mu_0 = k(t_2 - t_0)$ (2).

Підставимо вираз (2) в (1). Отримаємо, що швидкість нагрівання води

$\mu = k(t_2 - t_0) - k(t - t_0) = k(t_2 - t)$ (3).

За умовою задачі в початковий момент часу вода нагрівалася з швидкістю μ_1, тому $\mu_1 = k(t_2 - t_1)$. Звідси $k = \frac{\mu_1}{t_2 - t_1}$ (4).

Коли нагрівник вимкнули, то вода почала холонути з швидкістю $\mu_2 = k(t_2 - t_0)$ (5).

Підставимо вираз (4) в (5). Отримаємо $\mu_2 = \frac{\mu_1}{t_2 - t_1} \cdot (t_2 - t_0)$. Звідси температура навколишнього середовища $t_0 = t_2 + \frac{\mu_2(t_2 - t_1)}{\mu_1}$.

$$t_0 = 80\ °C - \frac{0{,}04\ \frac{°C}{хв} \cdot (80\ °C - 20\ °C)}{0{,}03\ \frac{°C}{хв}} = 0\ °C.$$

Щоб визначити, у скільки разів необхідно збільшити потужність електронагрівника, щоб довести воду до кипіння, припустимо, що нагрівник має потужність μ_{01} та за $t_3 = 100$ °C вода перестає нагріватися, тобто швидкість її нагрівання μ дорівнює $0\ \frac{°C}{хв}$.

Тоді з виразу (1) отримаємо значення потужності нагрівника μ_{01}:

$\mu = \mu_{01} - k(t_3 - t_0) = 0$;

$\mu_{01} = k(t_3 - t_0)$ (6).

Зміну потужності нагрівника визначимо як $\frac{\mu_{01}}{\mu_0}$, підставивши вирази (2) та (6).

$$\frac{\mu_{01}}{\mu_0} = \frac{k(t_3 - t_0)}{k(t_2 - t_0)} = \frac{t_3}{t_2}.$$

$$\frac{\mu_{01}}{\mu_0} == \frac{100\ ℃}{80\ ℃} = 1{,}25.$$