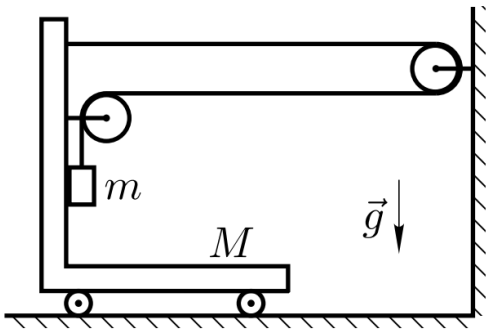
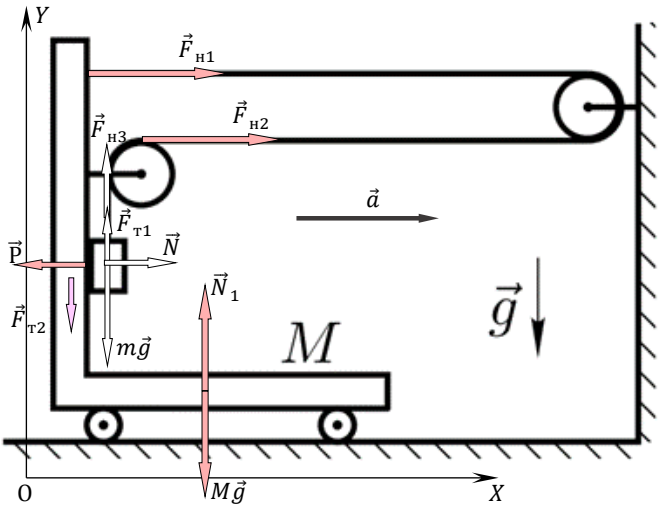
Задача 1 (11 клас)

1. Візок із закріпленою на ньому вертикальною пластиною може рухатися без тертя по горизонтальній поверхні. Маса візка з пластиною M. Брусок масою m підвішений на легкій нерозтяжній нитці, яка прикріплена до пластини і перекинута через блоки на стінці і пластині. Брусок доторкається пластини, коефіцієнт тертя між ними μ. Нитки між візком і стінкою натягнуті горизонтально. Масою блоків і тертям в них знехтувати. Візок утримують нерухомим, а потім відпускають. Яку швидкість матиме візок, коли вантаж опуститься вниз по вертикалі на відстань h ?



Розв'язок

Спосіб 1 (за II законом Ньютона)



На візок діють вертикальні сили: сила тяжіння $M\vec{g}$, сила нормальної реакції опори $\vec{N}_1$, сила тертя $\vec{F}_{т2}$ з боку бруска, що сповзає по стінці, сила натягу нитки $\vec{F}_{н4}$ (на рисунку не показано) з боку бруска та горизонтальні сили: сили натягу нитки $\vec{F}_{н1}$ та $\vec{F}_{н2}$, сила тиску $\vec{P}$ бруска на вертикальну пластину. Оскільки вертикальні сили взаємно скомпенсовані і не впливають на горизонтальне прискорення $\vec{a}$ достатньо записати II закон Ньютона для візка тільки в проекціях на вісь OX:

$$a = \frac{F_{н1}+F_{н2}-P}{M}. \qquad (1)$$

На брусок діють сила тяжіння $m\vec{g}$, сила натягу нитки $\vec{F}_{н3}$, сила $\vec{N}$ нормальної реакції вертикальної пластини, сила тертя $\vec{F}_{т1}$ між бруском і вертикальною пластиною. Прискорення бруска $\vec{a}_Б$ спрямовано під кутом до вертикалі і має горизонтальну складову $\vec{a}$ рівну прискоренню візка і вертикальну $\vec{a}_1$:

$$\vec{a}_Б = \vec{a} + \vec{a}_1. \qquad (2)$$

За II законом Ньютона: $\vec{a}_Б = \frac{m\vec{g}+\vec{F}_{н3}+\vec{N}+\vec{F}_{т1}}{m}$. В проекціях на осі координат:

$$OX: \quad am = N \qquad (3)$$

$$OY: \quad -a_1 m = -mg + F_{н3} + F_т \qquad (4)$$

Нитка проходить через блоки так, що при переміщенні візка у напрямі стінки на Δx, брусок переміщується вниз на $\Delta y = 2\Delta x$. Тому вертикальна складова прискорення бруска за модулем у два рази більша прискорення візка: $a_1 = 2a$. Враховуючи також, що сила тертя ковзання дорівнює $F_т = \mu N = \mu ma$, сила натягу нитки у будь-якій її точці однакова за модулем $F_{н1} = F_{н2} = F_{н3} = F_н$, та що за III законом Ньютона $P = N = ma$, отримуємо з (3) та (4) систему рівнянь

$$aM = 2F_н - ma$$

$$2am = mg - F_н - \mu ma$$

з якої визначаємо прискорення візка $\vec{a}$:

$$a = \frac{2mg}{M + (2\mu + 5)m}$$

Швидкість v візка визначаємо із співвідношення $l = \frac{v^2}{2a}$:

$$v = \sqrt{\frac{4mgl}{M + (2\mu + 5)m}}$$

Оскільки $l = \frac{1}{2}\ h$

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{M + (2\mu + 5)m}}$$

<u>Спосіб 2 (за законом збереження енергії)</u>

При русі бруска вниз його потенціальна енергія mgh (кінцеве положення бруска приймаємо за нульовий рівень) переходить в кінетичну енергію бруска і візка та витрачається на роботу проти сили тертя ковзання бруска по вертикальній пластині:

$$mgh = \frac{mv_б^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} + F_т h \qquad (5)$$

При переміщенні візка на l у напрямі стінки на стільки ж наближається до стінки блок, закріплений на пластині, тому сумарна довжина нитки між вертикальною пластиною візка і стінкою скорочується на $2l$, і брусок опускається на $h = 2l$. Рухається брусок разом з візком горизонтально зі швидкістю $v_x = v$ та опускається по вертикалі зі швидкістю $v_y = 2v$, тому швидкість бруска дорівнює

$$v_б = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v^2 + (2v)^2} = \sqrt{5v^2} = \sqrt{5}v. \qquad (6)$$

Сила тертя ковзання $F_т = \mu N = \mu ma$, де прискорення візка a при рівноприскореному русі зі стану спокою $a = \frac{v^2}{2l} = \frac{v^2}{h}$, тому

$$F_т = \mu ma = \mu m\frac{v^2}{h}. \qquad (7)$$

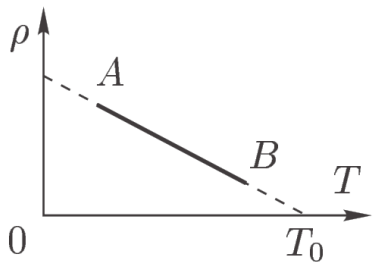
Підставляємо вирази (6) та (7) у рівняння (5) і знаходимо v:

$$mgh = \frac{5mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} + \mu m\frac{v^2}{h}h$$

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{M + (2\mu + 5)m}}$$

Задача 2 (11 клас)

Ідеальний газ із сталою кількістю молів здійснює процес АВ, зображений на рисунку, в координатах ρ(T), де ρ – густина газу, а T – його температура. При якій температурі тиск газу на 25 % менший за максимальне значення тиску. Початкова температура T_0 відома.



Розв’язок

Для опису процесу застосуємо рівняння Менделєєва-Клапейрона: $PV = \frac{m}{M}RT$.

Залежність тиску газу від температури з цього рівняння: $P = \frac{m}{MV}RT = \frac{\rho}{M}RT$ (1).

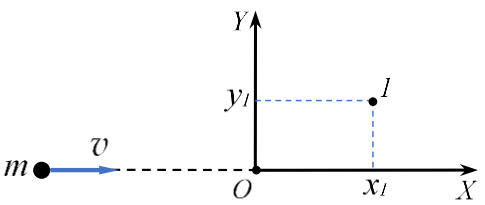
За графіком густина ідеального газ зменшується лінійно , тому $\rho = \rho_0 - kT$ (2), де ρ_0 – максимальна густина газу, k – коефіцієнт пропорційності.
Визначимо k, якщо врахуємо, що при T_0 густина газу набуває значення $\rho = 0$.
Тоді вираз (2) набуває вигляду $0 = \rho_0 - kT_0$. Звідси $k = \frac{\rho_0}{T_0}$. Підставимо значення k у вираз (2): $\rho = \rho_0 - \frac{\rho_0}{T_0}T = \rho_0(1 - \frac{T}{T_0})$ (3).
Урахуємо вираз (3) у залежності тиску від температури (1):

$$P = \frac{\rho_0(1 - \frac{T}{T_0})}{M}RT = \frac{\rho_0 R}{M}\left(1 - \frac{T}{T_0}\right)T = \frac{\rho_0 R}{M}\ T - \frac{\rho_0 R}{MT_0}T^2$$

Позначимо $\frac{\rho_0 R}{M} = \beta$. Тоді $P = \ \beta T - \frac{\beta}{T_0}T^2$ (4).
Очевидно, що в даному процесі залежність тиску ідеального газу від температури є квадратичною функцією, графіком якої є парабола з гілками, направленими вниз. Значення тиску у вершині параболи дорівнюватиме максимальному значенню тиску P_{max}.
Дослідимо вираз (4) на екстремум: $P' = \beta - \frac{2\beta}{T_0}T = 0$. Звідси $T = \frac{\beta T_0}{2\beta} = \frac{T_0}{2}$.
Тоді $P_{max} = \beta \cdot \frac{T_0}{2} - \frac{\beta}{T_0}\left(\frac{T_0}{2}\right)^2 = \frac{\beta T_0}{4}$ (6).
За умовою задачі при температурі T_1 тиск газу P_1 менший за максимальне значення тиску P_{max} на 25 %: $P_1 = P_{max} - 0{,}25P_{max} = 0{,}75P_{max} = \frac{3}{4}P_{max}$ (7).
Підставимо вирази (4) та (6) у вираз (7):
$\beta T_1 - \frac{\beta}{T_0}T_1^2 = \frac{3}{4}\frac{\beta T_0}{4}$ або $\frac{T_1^2}{T_0} - T_1 + \frac{3T_0}{16} = 0$ або $\frac{T_1^2}{T_0^2} - \frac{T_1}{T_0} + \frac{3}{16} = 0$.
Отримали квадратне рівняння. Для його спрощення позначимо $\frac{T_1}{T_0} = t$.
Тоді $t^2 - t + \frac{3}{16} = 0$.
Дискримінант дорівнює $D = 1 - 4 \cdot \frac{3}{16} = \frac{1}{4}$.
Корені рівняння: $t_1 = \frac{T_{11}}{T_0} = \frac{3}{4}$ та $t_2 = \frac{T_{12}}{T_0} = \frac{1}{4}$.
Отже, за даного процесу значення тиску газу на 25 % менше за максимальне значення при температурах $T_{11} = \frac{3T_0}{4}$ та $T_{12} = \frac{T_0}{4}$.

<u>Задача 3</u> (11 клас)

3. Частинка масою m з позитивним зарядом q летить зі швидкістю v у вакуумі, де будь-які зовнішні поля відсутні. В момент часу, коли частинка знаходиться у точці O ($x_o = 0$, $y_o = 0$) миттєво вмикається однорідне магнітне поле. Визначити величину магнітної індукції цього поля, якщо після його включення частинка перший раз перетинає площину XOY у точці 1 з координатами x_1 та y_1.

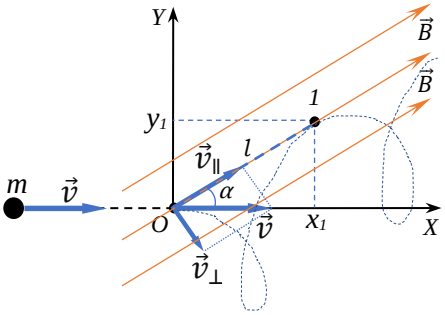


<u>Розв'язок</u>

В умові задачі не визначено напрямок магнітної індукції. Проаналізуємо можливі варіанти руху частинки в залежності від напряму поля. Якби лінії магнітної індукції були паралельні швидкості частинки, поле не діяло би на неї, напрям руху був би не змінним, і частинка не потрапила би у точку 1. Якби лінії магнітної індукції були перпендикулярні осі OX, поле у будь-який момент діяло би перпендикулярно швидкості, створюючи

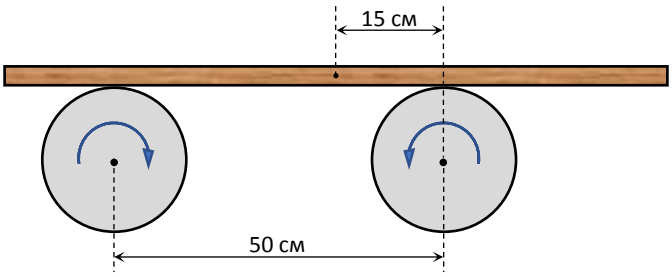
доцентрове прискорення, і частинка рухалася б по колу у площині, що перпендикулярна лініям магнітної індукції і включає вісь *OX*. Якщо при цьому поле перпендикулярне *XOY* і спрямоване «від нас», то частинка весь час знаходилася б у площині *XOY*, а не потрапляла на неї у певні моменти, як зазначено в умові. В усіх інших випадках частинка тільки періодично попадала би в площину *XOY* у точці *O*, але не потрапила би у точку 1.

Тому залишається прийняти, що лінії магнітної індукції спрямовані під деяким кутом α до напряму руху частинки. На складову швидкості $v_{\parallel} = v\cos\alpha$ паралельну вектору магнітної індукції $\vec{B}$ сила Лоренца діяти не буде і вона залишається не змінною, що створює рівномірний рух частинки вздовж лінії магнітної індукції. На складову швидкості $v_{\perp} = v\sin\alpha$ перпендикулярну вектору магнітної індукції $\vec{B}$ діє сила Лоренца $F_л = qBv_{\perp}$, що створює доцентрове прискорення $a_д = \frac{v_1^2}{R} = \frac{qBv_{\perp}}{m}$ (1), що приводить до обертового руху частинки. В результаті накладання цих рухів траєкторія частинки є гвинтовою лінією «накрученою» на лінії магнітної індукції. Крок гвинтової лінії , де T – період обертового руху частинки: З виразу (1): $v_{\perp} = \frac{qBR}{m}$, тому $T = \frac{2\pi m}{qB}$. У момент включення поля частинка, що знаходиться у точці *O*, відхиляється від площини *XOY* і попадає на неї в точці 1 через час одного оберту T, тобто відстань між точкою *O* і точкою 1 дорівнює одному кроку гвинтової лінії $l = v_{\parallel}T = v_{\parallel}\frac{2\pi m}{qB}$. З іншого боку $l = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. Прирівнюємо вирази для l, та визначаємо модуль вектора магнітної індукції: $B = \frac{2\pi m}{q\sqrt{x_1^2+y_1^2}}v\cos\alpha$. Враховуючи, що $\cos\alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$ отримуємо $B = \frac{2\pi m x_1}{q(x_1^2+y_1^2)}v$.



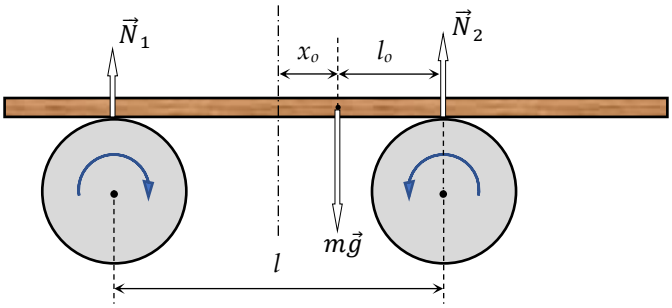
<u>Задача 4</u> (11 клас)

4. Два однакових циліндри, осі яких горизонтальні і паралельні, обертаються з однаковою швидкістю в протилежних напрямах, як показано на рисунку. На циліндри кладуть горизонтально масивну однорідну дошку так, що в момент дотику її центр знаходиться на відстані 15 см по горизонталі від осі одного з циліндрів. Якої максимальної швидкості досягне дошка, приведена в рух циліндрами? Відстань між осями циліндрів дорівнює 50 см, коефіцієнт тертя між дошкою і поверхнями циліндрів 0,4.



<u>Розв'язок</u>

На дошку, що лежить циліндрах, які обертаються, діють сили тертя ковзання $F_{т1} = \mu N_1$ і $F_{т2} = \mu N_2$ в протилежних напрямах. Якщо дошка лежить не симетрично відносно циліндрів, то вага дошки розподілена не порівну і сили тертя різні. Коли центр маси дошки зміщений на x від вертикальної площини, симетричної відносно циліндрів, з рівноваги моментів сил відносно осі, що лежить на площині симетрії і проходить через лінію, що з'єднує точки дотику дошки до циліндрів, маємо: $N_1\frac{l}{2} -$



$N_2\frac{l}{2}+mgx=0$ або $N_2-N_1=\frac{2mgx}{l}$. Тобто N_2 більша і більшою буде сила тертя $F_{т2}$, дошка буде рухатися з прискоренням вліво.

$$a=\frac{F_{т2}-F_{т1}}{m}=\frac{\mu N_2-\mu N_1}{m}=\frac{\mu(N_2-N_1)}{m}=\frac{\mu}{m}\frac{2mgx}{l}=\frac{2\mu g}{l}x.$$

Прискорення пропорційне зміщенню від положення рівноваги і має протилежний напрямок, тобто дошка буде здійснювати гармонічні коливання з циклічною частотою $\omega=\sqrt{\frac{2\mu g}{l}}$. Залежність координати від часу $x=x_o\cos\omega t$, де x_o – значення координати в початковий момент часу, коли дошку опустили на циліндри, яке є амплітудою коливань. Залежність швидкості від часу можна визначити як похідну від координати $v=-x_o\omega\sin\omega t$. Тобто дошка має максимальну швидкість в моменти проходження положення рівноваги (центр маси посередині між циліндрами) і ця швидкість дорівнює:

$$v_{max}=x_o\omega=x_o\sqrt{\frac{2\mu g}{l}}=10\text{см}\sqrt{\frac{2\cdot0{,}4\cdot9{,}8}{0{,}5}}\approx40\,\frac{\text{см}}{\text{с}}.$$