Відповіді II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2019-2020 н.р.
6 клас

1. Оскільки кожне доданок числа не менше одиниці, то така сума може бути отримана тільки додаванням 2018 одиниць і однієї двійки. Якщо двійку збільшити в десять разів, то отримаємо 20. Якщо у початковій сумі замінити 2 на 20, то сума збільшиться на 18 і стане рівна 2020 + 18 = 2038.

Відповідь : 2038.

2. I спосіб (арифметичний). Розглянемо вертикальну сторону квадрата: до неї укладаються дві більші сторони прямокутника та дві менші. Тепер розглянемо горизонтальну сторону квадрата: до неї укладаються дві більші сторони прямокутника та одна менша, а також відрізок, рівний різниці цих сторін.

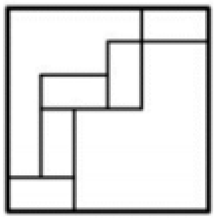
Рис. 1

Оскільки сторони квадрата рівні, то менша сторона прямокутника дорівнює різниці між більшою та меншою. Отже, більша сторона в два раза довша меншої. Тоді, шість довжин меншої сторони складають 18 см. отже, довжина меншої сторони – 3 см, а більшої – 6 см.

II спосіб (алгебраїчний). Нехай довжина більшої сторони прямокутника x см, а довжина меншої – y см. Тоді довжина горизонтальної сторони квадрата складає $x+(x–y)+y+x$ (см). За умовою ця сума дорівнює 18 см, отже $x + (x– y) + y + x = 18$, $3x = 18$; $x = 6$.

Аналогічно складемо рівняння, розлянувши довжину вертикальної сторони: $y + x + x + y = 18$, тоді $2x + 2y = 18$; $x + y = 9$. Оскільки $x = 6$, то $y = 3$.

Відповідь: 3 см і 6 см.

3. Розглянемо ту частину шляху, коли Сашко донизу їде ліфтом, а уверх йде пішки. З одного боку, шлях пішки займає вдвоє більше часу, а з іншого – більше на 10 секунд. Отже, цю частину шляху він проїхав за 10 секунд, а пройшов пішки за 20 секунд. Оскільки весь шлях на ліфті займає 60 секунд, то пішки він йшов 1/6 шляху. Зауважимо, що пішки він йшов ціле число проміжків між поверхами. Оскільки будинок дев'ятиповерховий, пішки він йшов 1 проміжок, а їхав 5. Отже, Сашко мешкає на сьомому поверсі.

Відповідь: Сашко мешкає на 7 поверсі.

4. Скористаємося подільністю на 9, на усі числа, що розглядатимемо, будемо дивитися як на остачу за модулем 9. На початку гри число сірників дорівнює 3. Якщо першим ходив Павло, то число стане рівним 5, тоді після ходу Дениса воно знову стане рівним 3. І далі все повторюється. Якщо порядок ходів інший, то спочатку ходить Денис, і число сірників на столі стає рівним 1, далі після ходу Павла воно знову стане рівним 3.

Як бачимо з умов задачі, першим ходив Павло, лише після такого порядку ходів на столі може лишитися 5 сірників. Він і переміг, оскільки саме Денис не може зробити наступний хід.

Відповідь: переміг Павло, він ходив першим.

5. Обійдемо озеро по кругу і напишемо на деревах букви: А, Б, В, потім знову А, Б, В і так далі. Дерев з кожною буквою буде по 2019 : 3 = 673.

Якби сосен з кожною буквою було б не більше ніж 336, то їх всього було б не більше ніж 336 · 3 = 1008.

А оскільки їх 1009, то сосен з якоюсь буквою (скажімо, А) буде хоч би 337. (за принципом Діріхле)

Розглянемо тепер лише дерева з буквою А. Якщо якісь дві сосни стоять підряд, то завдання вирішене — дерево з буквою В між ними задовольняє умовам. Якщо ж між кожними сусідніми соснами з буквою А зростає хоч би по одній ялинці, то дерев з буквою А буде не менше чим 337 · 2 = 674, а це не так.

7 клас

1. $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}=\frac{2019}{19}=106\frac{5}{19}$, a=106.

$\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}=\frac{5}{19}$,

$b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}=\frac{19}{5}=3\frac{4}{5}$, b=3.

$c+\frac{1}{d}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$, c=1, d=4.

$abcd$=106·3·1·4=1272.

Відповідь: 1272.

2. Розглянемо ту частину шляху, коли Сашко донизу їде ліфтом, а уверх йде пішки. З одного боку, шлях пішки займає вдвоє більше часу, а з іншого – більше на 10 секунд. Отже, цю частину шляху він проїхав за 10 секунд, а пройшов пішки за 20 секунд. Оскільки весь шлях на ліфті займає 60 секунд, то пішки він йшов 1/6 шляху. Зауважимо, що пішки він йшов ціле число проміжків між поверхами. Оскільки будинок дев'ятиповерховий, пішки він йшов 1 проміжок, а їхав 5. Отже, Сашко мешкає на сьомому поверсі.

Відповідь: Сашко мешкає на 7 поверсі.

3. Нехай перші 10 хвилин Карлсон з'їв x цукерок, тоді шоколадних серед них було 0,75x. З умови задачі випливає, що доля з'їдених Карлсоном шоколадних цукерок складає 80%, отже 0,75x+3=0,8 (x+3). Звідси x=12, що складає 20% усії цукерок. Отже, у пакунку було 60 цукерок.

Відповідь: 60 цукерок.

4. **1 спосіб**. Позначимо площі, зафарбовані синім (blue), зеленим (green) і жовтим (yellow) кольором, як B, G і Y відповідно.

Оскільки зелений колір виходить змішуванням двох частин жовтої фарби і однієї частини синьої, то на зафарбовування зеленим кольором площі G витрачається кількість жовтої фарби, що відповідає площі $\frac{2}{3}$G, а синім – $\frac{1}{3}$G.

Ураховуючи, що вся синя фарба була витрачена, складемо рівняння:

$B + \frac{1}{3}G = 38$.

Окрім того, за умовою, G на 6 дм^2 більше, ніж B, тобто B = G - 6. Підставивши значення B у рівняння, отримаємо, що G = 33, отже, B = 27.

Оскільки вся жовта фарба також була витрачена, то $Y + \frac{2}{3}G = 38$. Підставивши в цю рівність значення G = 33, отримаємо, що Y = 16.

2 спосіб. Позначимо через x одну частину, що пішла на отримання зеленої фарби. Тоді жовтою фарбою пофарбовано (38 - 2x) дм^2, зеленою – 3x дм^2, а синьою – (38 - x) дм^2.

Оскільки за умовою зеленою фарбою пофарбовано на 6 дм^2 більше, ніж синьою, то $3x - 6 = 38 - x$.

Звідси x = 11, отже, жовтою фарбою пофарбовано $38 - 2 \cdot 11 = 16$ дм ^{2}, зеленою $3 \cdot 11 = 33$ дм ^{2}, синьою $38 - 11 = 27$ дм ^{2}.

Відповідь: синьою зафарбовано 27 дм^2, зеленою – 33 дм^2, жовтою – 16 дм^2.

5. Обійдемо озеро по кругу і напишемо на деревах букви: А, Б, В, потім знову А, Б, В і так далі. Дерев з кожною буквою буде по 2019 : 3 = 673.

Якби сосен з кожною буквою було б не більше ніж 336, то їх всього було б не більше ніж $336 \cdot 3 = 1008$.

А оскільки їх 1009, то сосен з якоюсь буквою (скажімо, А) буде хоч би 337. (за принципом Діріхле.)

Розглянемо тепер лише дерева з буквою А. Якщо якісь дві сосни стоять підряд, то завдання вирішене — дерево з буквою В між ними задовольняє умовам. Якщо ж між кожними сусідніми соснами з буквою А зростає хоч би по одній ялинці, то дерев з буквою А буде не менше чим $337 \cdot 2 = 674$, а це не так.

6. Сума усіх заданих цифр 0+1+…+9=45 кратна 9. Тому сума цифр числа A, що утворилося у Антона, та числа O, що утворилося у Олени, дорівнює 45. Таким чином, якщо число A ділиться на 9, то його сума цифр кратна 9, але тоді і Оленине число O так само має суму цифр, що кратна 9, а тому також ділиться на 9. Аналогічно, якщо число A не ділиться на 9, то і число O так само не ділиться на 9.

Відповідь: гра завжди закінчиться внічию.

8 клас

1. $||x-2019|-2021|+x=0$.

$\left||x-2019|-2021\right| = -x$, $|x-2019|-2021=-x$ або $|x-2019|-2021=x$

а) $|x-2019| = 2021-x$

$x-2019=2021-x$ або $x-2019= x-2021$;

$2x=4040$ або $0x=-2$

$x=2020$ коренів не має.

б) $|x-2019| = 2021+x$

$x-2019=2021+x$ або $x-2019= -x-2021$;

$0x=4040$ або $2x= -2$

коренів не має $x= -1$

Перевірка показує, що коренем рівняння є число $x=-1$.

Відповідь: $x = -1$

2. **І спосіб.** Розглянемо ту частину шляху, коли Сашко донизу їде ліфтом, а уверх йде пішки. З одного боку, шлях пішки займає вдвоє більше часу, а з іншого – більше на 10 секунд. Отже, цю частину шляху він проїхав за 10 секунд, а пройшов пішки за 20 секунд. Оскільки весь шлях на ліфті займає 60 секунд, то пішки він йшов 1/6 шляху. Зауважимо, що пішки він йшов ціле число проміжків між поверхами. Оскільки будинок дев'ятиповерховий, пішки він йшов 1 проміжок, а їхав 5. Отже, Сашко мешкає на сьомому поверсі.

ІІ спосіб. Нехай ліфт рухається зі швидкістю v поверхів в секунду, Сашко мешкає на n-му поверсі, а виходить зазвичай на m-му.

Тоді $\begin{cases} \dfrac{n-1}{v} = 60; \\ \dfrac{m-1}{v} + \dfrac{n-m}{v} \cdot 2 = 70, \end{cases}$

Звідки $m - 1 + 2n - 2m = 70v$. Підставимо $v = \dfrac{n-1}{60}$ з першого рівняння:

$2n - m - 1 = \dfrac{n-1}{60} \cdot 7$

$12n - 6m - 6 = 7n - 7$

$5n + 1 = 6m.$

Оскільки $m < 9$, то $n = 7$, а $m = 6$.

Відповідь: Сашко мешкає на 7 поверсі.

3.

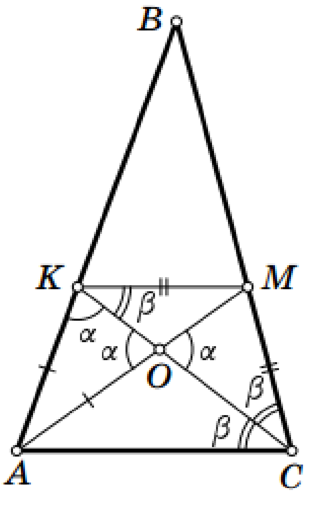

Рис. 2

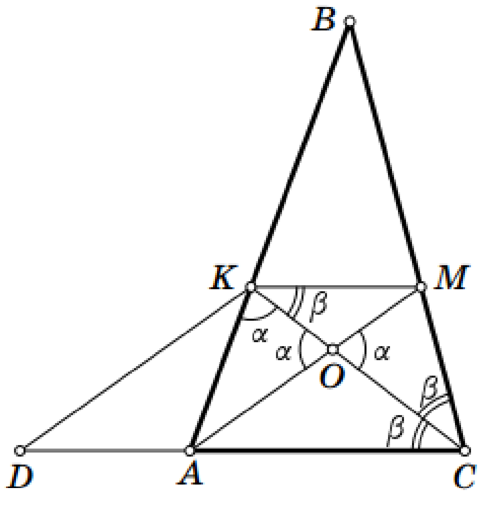

Рис. 3

І спосіб. Нехай ∠AKO=α. Тоді ∠AOK= α, оскільки Δ*AKO* рівнобедрений; ∠*MOC* = ∠*AOK* = α (як вертикальні). Нехай ∠*MKC*=β. Тоді ∠*MCK*=∠*MKC*= β, оскільки Δ*MKC* рівнобедрений. Якщо *KM*||*AC*, то ∠*ACO*=β. З Δ*AKC* одержимо, що ∠*CAK*= = 180◦ − α − β; з Δ*MOC* отримаємо, що ∠OMC = = 180◦ − α − β. Таким чином, ∠*CAK* = ∠*AMC*. Зауважимо, що ∠*MKB* = ∠*CAK* і ∠*ACM*= ∠*KMB*, оскільки *KM* || *AC*. Звідси Δ*AMC* = Δ*BKM* за стороною та двома кутами. Отже, *AM*= *KB*

ІІ спосіб. Як було доведено в І розвязанні, *CK* – бісектриса кута *ACB*, промені *CA* і *CB* симетричні відносно цієї бісектриси. Нехай *KD* –відрізок, симетричний відрізку KB відносно прямої CK (рис. 3). Тоді точка D лежить на продовженні сторони CA (див. коментар).

Доведемо, що чотирикутник $DKMA$ – паралелограм.

Дійсно, $DA \parallel KM$, крім того, $\angle KAM = \angle KAO = 180^o - 2\alpha$, $\angle DKA = \angle DKC - \angle AKC$, що (із симетрії) дорівнює $\angle BKC - \angle AKC = \angle BKM + \angle MKC - \angle AKC = 180^o - 2\alpha$. Отже, $DK \parallel AM$. Значить, $DKMA$ дійсно паралелограм і $DK = AM$, тобто $BK = AM$.

Коментар. Можна строго довести, що точка D попадає саме на продовження сторони AC (за точку A).

Для цього потрібно довести, що $\angle CKB > \angle AKC$, тобто що кут AKC – гострий. Але AKC – кут при основі рівнобедреного трикутника AKO, отже, він гострий.

4. З умови задачі зрозуміло, що обидві невідомі – парні, бо інакше маємо рівність парного та непарного чисел.

Позначимо через $a=2n$ та $b=2k$ $\Rightarrow 2n\cdot 8k^3+8n^3+2k=2018$ або $8nk^3+4n^3+k=1009$. Далі можна зрозуміти, що k обов'язково має бути непарним, і зараз доволі просто все розв'язати простим невеликим перебором.

$nk^3 \le \dfrac{1009}{8}$ або $k^3 \le 125$.

Таким чином залишається рівно три варіанти.

$k=5 \Rightarrow 1000n+4n^3=1004 \Rightarrow n=1$ задовольняє умову. При більших n ліва частина стає більшою за 1004.

$k=3 \Rightarrow 64n+4n^3=1006 \Rightarrow$ розв'язків немає, бо ліва частина ділиться на 4, а права – ні.

$k=1 \Rightarrow 8n+4n^3=1008 \Rightarrow 2n+n^3=252 \Rightarrow n=2m \Rightarrow 4m+m^3=252 \Rightarrow m+2m^3=63$. Залишається розібрати три випадки по m, оскільки з останньої рівності очевидно, що $m \le 3$.

$m=1$, $m=2$ та $m=3$ умови не задовольняє.

Тому шукана пара єдина, $k=5$ та $n=1 \Rightarrow b=10$ та $a=2$.

Відповідь: $a=2$, $b=10$.

5. Виберемо довільну точку на площині та проведемо через неї прямі, що паралельні до кожної із заданих. Кути між цими прямими є такими ж, як кути між відповідними до них паралельними прямими. Утворені прямі розіб'ють площину на 4038 кутів, сума величин яких дорівнює 360º. Тому, за принципом Діріхле хоча б один з кутів не є більшим за число 360º/4038 = 60º/673.

6. Стратегія Олени така – вона вибирає кожним своїм ходом парні числа у порядку спадання. Якщо при цьому Антон за перші чотири ходи принаймні раз вибере також парну цифру, то своїм останнім ходом йому доведеться вибирати непарну цифру, а тому ця цифра у його п'ятицифровому числі стане останньою і число буде непарним, тому не буде ділитися на 6.

Таким чином Антон має вибирати перші чотири ходи поспіль непарні цифри. Тому Олена витягне за перші три ходи цифри 8 , 6 та 4. Перед своїм четвертим ходом Олена дивиться на остачу при діленні на 3 чотирицифрового числа, що має Антон. Якщо ця остача дорівнює 0, то Олена забирає цифру 0 своїм четвертим ходом. Тому Антону, щоб отримати парне число треба брати цифру 2 – єдину парну цифру, що залишилася. Але тоді число не буде ділитися на 3. Якщо у Антона остача дорівнює 1, то Олена забирає четвертим ходом цифру 2 . Антон має обрати парну цифру 0 , що лишилася, але за таких умов число не ділитиметься на .

Відповідь: Олена.

9 клас

1. Оскільки $2^{2018}\cdot5^{2019}=2^{2018}\cdot5^{2018}\cdot5=(2\cdot5)^{2018}\cdot5=10^{2018}\cdot5$, то добутком буде число, що складається із 2019 цифр, перша із яких дорівнює 5, а решта 2018 цифр – нулі. Тоді сума цифр числа $2^{2018}\cdot5^{2019}$ дорівнює п’ять.

Відповідь: 5.

2. **Відповідь.** 4,5 год.

Нехай s – весь шлях, а v – швидкість на першій половині шляху. Тоді

$$\frac{s}{2v}-\frac{s}{2\cdot1{,}25v}=0{,}5.$$

$$\frac{s}{2v}=0{,}5\cdot\frac{1{,}25}{0{,}25}.$$

$$t=\frac{s}{2v}+\frac{s}{2\cdot1{,}25v}=\frac{s}{2v}\cdot\frac{2{,}25}{1{,}25}=0{,}5\cdot\frac{1{,}25}{0{,}25}\cdot\frac{2{,}25}{1{,}25}=4{,}5.$$

3. **Відповідь:** $a=2$, $b=10$.

Розв’язання. З умов задачі зрозуміло, що обидві невідомі – парні, бо інакше маємо рівність парного та непарного чисел.

Позначимо через $a=2n$ та $b=2k$ $\Rightarrow 2n\cdot8k^3+8n^3+2k=2018$ або $8nk^3+4n^3+k=1009$. Далі можна зрозуміти, що k обов'язково має бути непарним, і зараз доволі просто все розв’язати простим невеликим перебором.

$nk^3\le\frac{1009}{8}$ або $k^3\le125$.

Таким чином залишається рівно три варіанти.

$k=5\Rightarrow 1000n+4n^3=1004\Rightarrow n=1$ задовольняє умову. При більших n ліва частина стає більшою за 1004.

$k=3\Rightarrow 64n+4n^3=1006\Rightarrow$розв’язків немає, бо ліва частина ділиться на 4, а права – ні.

$k=1\Rightarrow 8n+4n^3=1008\Rightarrow 2n+n^3=252\Rightarrow n=2m\Rightarrow 4m+m^3=252\Rightarrow m+2m^3=63$. Залишається розібрати три випадки по m, оскільки з останньої рівності очевидно, що $m\le3$.

$m=1$, $m=2$ та $m=3$ умови не задовольняє.

Тому шукана пара єдина, $k=5$ та $n=1$ $\Rightarrow b=10$ та $a=2$.

4. Виберемо довільну точку на площині і проведемо через неї прямі, що паралельні до кожної із заданих. Кути між цими прямими є такими ж, як кути між відповідними до них паралельними прямими.

Утворені прямі розіб’ють площину на 4038 кутів, сума величин яких дорівнює 360º. Тому, за принципом Діріхле хоча б один з кутів не є більшим за число 360º/4038 = 60º/673.

5. Нехай *AL* – бісектриса трикутника *ABC*, *O* – центр описаного навколо цього трикутника кола, *D* – така точка на стороні *AC*, що *AD* = *AB* (рис. 4).

Позначимо $\angle ABC=\beta$.

Нехай β<90º, тоді $\angle AOC=2\beta$ як центральний до $\angle ABC=\beta$.

Оскільки трикутник ACO – рівнобедрений, $\angle OAC=90^{\circ}-\beta$.

Трикутники ABL і ADL рівні за двома сторонами та кутом між ними, тому $\angle ADL=\beta$.

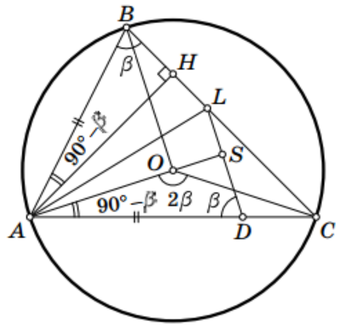

Рис. 4

Позначимо точку перетину AO і DL через S.

$\angle SAD+\angle SDA=90^{\circ}$, отже трикутник ASD – прямокутний, що й треба було довести.

Нехай $\beta>90^{\circ}$, тоді $\angle SAD=\beta-90^{\circ}$, $\angle SDA=180^{\circ}-\beta$.

У випадку $\beta=90^{\circ}$ точка D лежить на промені AO і трикутники ABL і ADL рівні, отже $\angle ADL=90^{\circ}$, що й треба було довести.

6. Першим ходом Софія викреслює одне число (зрозуміло, що то буде число 1). Тоді Тарас може викреслити тільки 2 наступних числа. І надалі Софія бере кожним викреслює 1 число. Таким чином перед кожним своїм ходом Софія має ситуацію, коли викреслені перші 3 , 6, …, $3m$ чисел.

Нехай $k=3q+r$, $r=1, 2, 3$.

Якщо $r=1, 3$, то Софія своєю стратегією доводить ситуацію, коли перед її ходом залишається r чисел, які вона й викреслює разом з числом k і перемагає. Якщо $r=2$, то Софія викреслює 3 числа, серед яких і число k .

Відповідь: Софія.

10 клас

1. Розглянемо вираз: $1+2019^2+\dfrac{2019^2}{2020^2}$.

Нехай 2019 = a. Тоді маємо:

$$\frac{(a+1)^2+a^2(a+1)^2+a^2}{(a+1)^2}=\frac{a^4+a^2+1+2a^3+2a^2+2a}{(a+1)^2}=(\frac{a^2+a+1}{a+1})^2.$$

$$\sqrt{1+2019^2+\frac{2019^2}{2020^2}}+(\frac{2020}{2019})^{-1}=\frac{a^2+a+1}{a+1}+\frac{a}{a+1}=\frac{(a+1)^2}{a+1}=a+1=2020.$$

Відповідь: 2020.

2. Нехай n – кількість горняток (число осіб у родині), а x – кількість випитого молока (у горнятках).

Тоді кількість випитої кави дорівнює $n–x$.

Тарас випив одне горнятко кави з молоком, яке складалося з чверті молока ($\frac{x}{4}$) та шостої частини всієї кави ($\frac{n-x}{6}$). Одержимо $\frac{x}{4}+\frac{n-x}{6}=1$.

$3x+2(n-x)=12$, $x+2n=12$.

Оскільки n – ціле число, то з останньої рівності випливає, що x – ціле число, причому парне ($x=12–2n$). Окрім того, $x \le n$, кількість випитого молока не більше, ніж загальна кількість напою. Останнє рівняння має три розв’язки (методом перебору): $n=6$, $x=0$; $n=5$, $x=2$; $n=4$, $x=4$.

При цьому перший і останній розв’язок відповідають випадку, коли всі пили просто молоко або просто каву, а другий – коли дійсно пили каву з молоком.

Відповідь: 5 осіб.

3. Нехай *ABCD* – указаний чотирикутник, *O* – точка перетину його діагоналей, а AA_1 і CC_1 – перпендикуляри, опущені на діагональ *BD*.

Тоді, $S_{AOB}\, S_{BOC}\, S_{COD} S_{DOA} = \frac{1}{2} AA_1 \cdot OB \cdot \frac{1}{2}\, CC_1 \cdot OB \cdot \frac{1}{2}\, CC_1 \cdot OD \cdot \frac{1}{2}\, AA_1 \cdot OD =$

$$= \left(\frac{1}{2} AA_1 \cdot OD \cdot \frac{1}{2} CC_1 \cdot OB\right)^2 = (S_{AOD} S_{COB})^2$$

і є квадратом цілого числа. Але якщо квадрат цілого числа закінчується цифрою 9, то передостання цифра є парною.

Справді, $(10a+3)^2 = 100a^2+60a+9$, а $(10a+7)^2 = 100a^2+140a+49$.

Тому, указаний добуток не може закінчуватись упорядкованим набором 2019.

Відповідь: ні, не може.

4. $\left(1+\frac{a}{b}\right)^{2018} + \left(1+\frac{b}{a}\right)^{2018} \ge 2^{2019}$.

З нерівності між середніми, яку ми використовуємо двічі, маємо, що

$$\left(1+\tfrac{a}{b}\right)^{2018} + \left(1+\tfrac{b}{a}\right)^{2018} \ge 2\sqrt{\left(1+\tfrac{a}{b}\right)^{2018}\left(1+\tfrac{b}{a}\right)^{2018}} = 2\left(\left(1+\tfrac{a}{b}\right)\left(1+\tfrac{b}{a}\right)\right)^{1009} =$$

$$= 2\left(2+\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{a}\right)^{1009} \ge 2(2\cdot 2)^{1009} = 2^{2019}.$$

5. Позначимо через *O* – точку перетину діагоналей чотирикутника *ABCD*. На прямій *AC* розташовані висоти ΔBCD та ΔACD, тому ортоцентри *K* та *M* лежать на цій прямій. Аналогічно на прямій *BD* лежать ортоцентри *L*,*Q* (рис. 5).

BK||*CL*, оскільки обидва цих відрізки перпендикулярні прямій *AD*.

Тоді можемо записати такі рівності кутів:

$\angle BKC = \angle KCL = \angle ACL = 90^\circ - \angle CAD =$
$= 90^\circ - \angle DBC = 90^\circ - \angle OBC = \angle BCK$.

Таким чином ΔBCK – рівнобедрений, тому точки *C* і *K* симетричні відносно прямої *BL*, звідси випливає, що ΔBCK – також рівнобедрений.

Таким чином рівні кути $\angle BKC = \angle BCK = \angle KCL = \angle CKL$, тому чотирикутник *BCKL* – ромб.

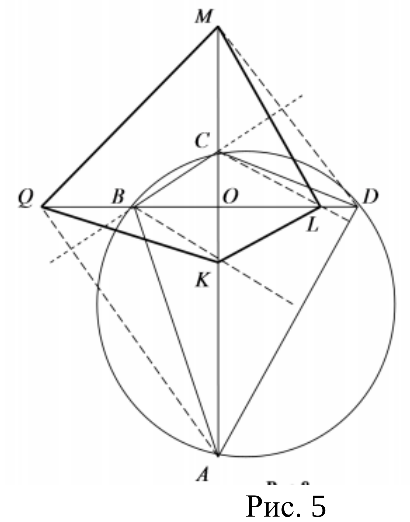

Рис. 5

Аналогічно доводиться, що й чотирикутник *ADMQ* також ромб. Звідси вже просто одержуємо, що чотирикутник *KLMQ* є центрально симетричним образом чотирикутника *ABCD* відносно точки *O*, звідки й випливає, що вони рівні.

6. Покажемо, що це значення може досягатися, наприклад, при такій побудові дробів:

$$\frac{1}{1011}, \frac{2}{1012}, \frac{3}{1013}, \dots, \frac{1010}{2019}.$$

Припустимо, що при деякому іншому розподілу дробів матимемо менше значення максимуму. Розглянемо дріб з знаменником 2019, очевидно, що це число не може бути чисельником. Тоді там має стояти число, що менше від

1010, бо інакше отримаємо більше значення для максимуму. Нехай там стоїть число $a < 1010$ і ми серед розподілу дробів маємо дріб $\frac{a}{2019}$. Тому серед множини чисел $M = \{a, a+1, \ldots, 1010, 1011, \ldots, 2018\}$ є принаймні 1009 чисел. Треба утворити окрім дробі $\frac{a}{2019}$ ще 1008 дробів.

З принципу Діріхле, принаймні один з цих дробів матиме і чисельник, і знаменник з множини M, позначимо ці числа $b < c$. Але тоді маємо, що $\frac{1010}{2019} < \frac{b}{2019} < \frac{b}{c}$, тобто максимум стане більшим. Одержана суперечність завершує доведення.

Відповідь: $\frac{1010}{2019}$.

11 клас

1. $2019^{2018}+2019^{2019}= 2019^{2018}(1 + 2019)= 2019^{2018} \cdot 2020 = 2019^{2018} \cdot 202\cdot 10$. Останньою цифрою цього числа буде 0. Передостанню цифру визначить значення $2019^{2018} \cdot 202$.

Цей добуток закінчується такою ж цифрою, як і $9^{2018} \cdot 202$.

Оскільки 9^{2n} завжди закінчується цифрою 1, то $9^{2018} \cdot 202$ закінчується цифрою 2. Це і є передостання цифра числа $2019^{2018} \cdot 2020$.

Відповідь: 2.

2. $1-\dfrac{2}{f(x)}=\dfrac{f(n)-2}{f(n)}=\dfrac{n^3+3n}{n^3+3n+2}=\dfrac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$.

Підставляємо цей дріб для n=1, 2, …, 2019 у добуток, скорочуємо, одержимо:

$$\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\cdot\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}\cdot\frac{4\cdot 7}{5\cdot 6}\cdot\ldots\cdot\frac{2018\cdot 2021}{2019\cdot 2020}\cdot\frac{2019\cdot 2022}{2020\cdot 2021}=\frac{1\cdot 2022}{3\cdot 2020}=\frac{337}{1010}$$

Відповідь: $\dfrac{337}{1010}$.

3.

Нехай $ABCD$ – указаний чотирикутник, O – точка перетину його діагоналей, а AA_1 і CC_1 – перпендикуляри, опущені на діагональ BD.

Тоді, $S_{AOB}\, S_{BOC}\, S_{COD} S_{DOA} = \frac{1}{2}AA_1\cdot OB\cdot\frac{1}{2}\, CC_1\cdot OB\cdot\frac{1}{2}\, CC_1\cdot OD\cdot\frac{1}{2}\, AA_1\cdot OD=$

$$=\left(\frac{1}{2}AA_1\cdot OD\cdot\frac{1}{2}CC_1\cdot OB\right)^2 = (S_{AOD}S_{COB})^2$$

і є квадратом цілого числа. Але якщо квадрат цілого числа закінчується цифрою 9, то передостання цифра є парною.

Справді, $(10a+3)^2= 100a^2+60a +9$, а $(10a +7)^2= 100a^2+140a +49$.

Тому, вказаний добуток не може закінчуватись цифрами 2019.

Відповідь: ні, не може.

4. З нерівності між середніми маємо, що

$$\frac{1}{2019}(a_1+ a_2+\ldots+ a_{2019})\geq \sqrt[2019]{a_1a_2\ldots a_{2019}}$$

$$\text{або } (a_1+ a_2+\ldots+ a_{2019})^{2019}\geq 2019^{2019}\, a_1a_2\ldots a_{2019}.$$

З умови задачі випливає, що

$$(a_1+ a_2+\ldots+ a_{2019})^{2019}=\left(\sqrt[2018]{2019^{2019}}\right)^{2019}=\left(2019\cdot\sqrt[2018]{2019}\right)^{2019}=$$

$$= 2019^{2019} \cdot \sqrt[2018]{2019^{2019}} = 2019^{2019} \ a_1 a_2 \ldots a_{2019}.$$

Тобто в нерівності між середніми справджується рівність, а це можливо лише за умови, що $a_1 = a_2 = \ldots + = a_{2019} = \frac{1}{2019} \cdot 2019 \cdot \sqrt[2018]{2019^{2019}} = \sqrt[2018]{2019}$.

Відповідь: $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2019} = \sqrt[2018]{2019}$.

5. Основою прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадрат $ABCD$.

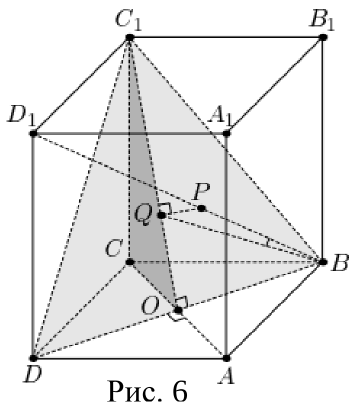

Рис. 6

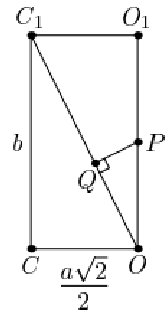

Рис. 7

Розглянемо переріз BDC_1 даного паралелепіпеда (рис. 6).

Нехай O – точка перетину діагоналей квадрата $ABCD$.

Оскільки ΔDC_1B – рівнобедрений, то C_1O – його висота.

Нехай точка P – точка перетину діагоналей паралелепіпеда, PQ – перпендикуляр до (BDC_1).

Оскільки всі діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні, то точка P – рівновіддалена від вершин ΔDC_1B, тому Q – центр описаного навколо нього кола.

Ураховуючи, що цей трикутник – гострокутний і рівнобедрений, отримаємо, що точка Q лежить на відрізку C_1O.

Кутом між (BD_1) і (BDC_1) є гострий кут α між (BD_1) та її ортогональної проекції на (BDC_1), тобто кут PBQ.

Нехай $AB=a$, $AA_1=b$. Тоді $PB = \frac{\sqrt{2a^2+b^2}}{2}$.

Розглянемо прямокутник CC_1O_1O, де O_1 – точка перетину діагоналей квадрата $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 7).

Із подібності прямокутних трикутників POQ і C_1OO_1 отримаємо, що $\frac{PQ}{C_1O_1} = \frac{PO}{C_1O}$.

$C_1O_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $C_1O = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + b^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + b^2}$, то

$$PQ=\frac{\frac{b}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{2}+b^2}}=\frac{ab}{2\sqrt{a^2+2b^2}}.$$

Отже, $\sin\alpha=\frac{PQ}{PB}=\frac{ab}{\sqrt{(a^2+2b^2)(2a^2+b^2)}}$.

Величина гостого кута α буде найбільшою, тоді й тільки тоді, коли $\sin\alpha$ набуває найбільш можливе значення.

$$\sin\alpha=\frac{ab}{\sqrt{2a^4+2b^4+5a^2b^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)+5}}.$$

Оскільки $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\ge 2$, причому рівність досягається у випадку $a=b$, то $\sin\alpha\le\frac{1}{3}$ і найбільше значення шуканого кута $\alpha=\arcsin\frac{1}{3}$ відповідає тому, що даний паралепіпед є кубом.

6. Для кожного $a\le 2019$ нерівність має безліч розв'язків, бо при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$ маємо $2019\sin^5 x+2017\cos^7 x=2019\ge a$.

Оскільки $|2019\sin^5 x+2017\cos^7 x|\le 2019|\sin^5 x|+2017|\cos^7 x|=$ $=2019\sin^2 x|\sin^3 x|+2017\cos^2 x|\cos^5 x|\le 2019\sin^2 x+2017\cos^2 x=2017+2\sin^2 x\le 2019$, то $2019\sin^5 x+2017\cos^7 x\le|2019\sin^5 x+2017\cos^7 x|\le 2019<a$ для кожного $a>2019$ і нерівність розв'язків не має.

Відповідь: $a\le 2019$.