

Завдання

**II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2019-2020 н.р.**

6 клас

1. Сума 2019 натуральних чисел дорівнює 2020. З'ясуйте, як зміниться сума, якщо найбільший доданок збільшити в десять разів? Відповідь обґрунтуйте.

2. П'ять рівних прямокутників розташовані в квадраті зі стороною 18 см, як показано на рис. 1. Знайдіть довжини сторін прямокутника.

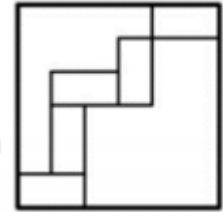


Рис. 1

3. Сашко мешкає в дев'ятиповерховому будинку. Він спускається ліфтом зі свого поверху на перший за 1 хвилину. Маленький зріст Сашка не дозволяє йому дотягнутися до кнопки свого поверху, тому, піднімаючись ліфтом вгору, він натискає ту кнопку, до якої може дістати, а далі йде пішки. Весь шлях наверх займає 1 хвилину 10 секунд. Ліфт рухається вгору й вниз з однаковою швидкістю, а Сашко піднімається вдвічі повільніше ліфта. З'ясуйте, на якому поверсі живе Сашко? Відповідь обґрунтуйте.

4. Мирон виклав на стіл 2019 сірників. Павло та Денис вирішили зіграти в гру – Павло може за один хід взяти зі стола 16 або 25 сірників, Денис може за один хід взяти зі стола 11 або 29 сірників. Хлопці ходи роблять по черзі, програє той, хто не може зробити хід, тобто на столі лишається менше сірників, ніж треба для ходу (або не лишилося жодного сірника після ходу супротивника). Мирон вийшов, а коли повернувся, то гра закінчилася, при цьому на столі лишилося 5 сірників. З'ясуйте, хто переміг у цій грі та хто ходив першим? Відповідь обґрунтуйте.

5. Довкола озера, що має форму круга, через рівні проміжки ростуть 2019 дерев: 1009 сосен і 1010 ялинок. Доведіть, що обов'язково знайдеться дерево, поряд з яким росте сосна й з іншого боку від якого через одне дерево теж росте сосна.

На виконання роботи відводиться 3 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів

Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Завдання

**II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2019-2020 н.р.**

7 клас

1. Числа a, b, c, d – натуральні. Відомо, що
$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}} = \frac{2019}{19}.$$

З'ясуйте, чому дорівнює добуток $abcd$?

2. Сашко мешкає в дев'ятиповерховому будинку. Він спускається ліфтом зі свого поверху на перший за 1 хвилину. Маленький зріст Сашка не дозволяє йому дотягнутися до кнопки свого поверху, тому, піднімаючись ліфтом вгору, він натискає ту кнопку, до якої може дістати, а далі йде пішки. Весь шлях наверх займає 1 хвилину 10 секунд. Ліфт рухається вгору й вниз з однаковою швидкістю, а Сашко піднімається вдвічі повільніше ліфта. З'ясуйте, на якому поверсі живе Сашко? Відповідь обґрунтуйте.

3. Карлсону подарували пакунок з цукерками: шоколадними та карамельками. За перші 10 хвилин Карлсон з'їв 20% усіх цукерок, причому 25% з них склали карамельки. Після цього Карлсон з'їв ще 3 шоколадні цукерки й доля карамельок серед з'їдених Карлсоном цукерок знизилась до 20%. З'ясуйте, скільки цукерок було в подарованому Карлсону пакунку? Відповідь обґрунтуйте.

4. Юний художник мав одну банку синьої та одну банку жовтої фарби, кожної з яких вистачає на фарбування 38 дм^2 площі. Використавши всю цю фарбу, він намалював картину: синє небо, зелену траву та жовте сонце. Зелений колір він отримував, змішуючи дві частини жовтої фарби й одну частину синьої. З'ясуйте, яку площу на його картині зафарбовано кожним кольором, якщо площа трави на картині на 6 дм^2 більше, ніж площа неба?

5. Довкола озера, що має форму круга, через рівні проміжки ростуть 2019 дерев: 1009 сосен і 1010 ялинок. Доведіть, що обов'язково знайдеться дерево, поряд з яким росте сосна й з іншого боку від якого через одне дерево теж росте сосна.

6. Є набір з десяти карток, на яких записано по одній цифрі 0; 1; ...; 9. Антон і Олена по черзі (розпочинає Антон) вибирають по одній картці та складають їх послідовно зліва направо так, що в кожного утворюється п'ятицифрове число (картку з цифрою 0 на своєму першому кроці жоден з гравців вибрати не може). Перемагає той, у кого число, що утворилося, ділиться націло на 9. Якщо в обох число ділиться на 9, або в обох не ділиться на 9, то вважається, що гра завершилась внічию. Кожен з гравців прагне перемогти. З'ясуйте, чи може за таких умов хтось з гравців забезпечити собі перемогу? Відповідь обґрунтуйте.

На виконання роботи відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів

Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Завдання

**II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2019-2020 н.р.**

8 клас

1. Розв'яжіть рівняння $||x-2019|-2021|+x=0$.
2. Сашко мешкає в дев'ятиповерховому будинку. Він спускається ліфтом зі свого поверху на перший за 1 хвилину. Маленький зріст Сашка не дозволяє йому дотягнутися до кнопки свого поверху, тому, піднімаючись ліфтом вгору, він натискає ту кнопку, до якої може дістати, а далі йде пішки. Весь шлях наверх займає 1 хвилину 10 секунд. Ліфт рухається вгору й вниз з однаковою швидкістю, а Сашко піднімається вдвічі повільніше ліфта. З'ясуйте, на якому поверсі живе Сашко? Відповідь обґрунтуйте.
3. На сторонах AB і BC трикутника ABC вибрано точки K і M відповідно так, що $KM \parallel AC$. Відрізки AM і KC перетинаються в точці O . Відомо, що $AK = AO$ і $KM = MC$. Доведіть, що $AM = KB$.
4. Знайдіть усі пари натуральних чисел (a, b) , що задовольняють рівності: $ab^3 + a^3 + b + 1 = 2019$.
5. На площині проведено 2019 прямих, жодні дві з яких не паралельні. Доведіть, що існує пара прямих, кут між якими не перевищує $0,1^\circ$.
6. Є набір з десяти карток, на яких записано по одній цифрі 0; 1; ...; 9. Антон та Олена по черзі (розпочинає Антон) вибирають по одній картці та складають їх послідовно зліва направо так, що у кожного утворюється п'ятицифрове число (картку з цифрою 0 на своєму першому кроці жоден з гравців вибрати не може). Антон перемагає в цій грі, якщо число, яке утворилося в нього, ділиться націло на 6. Інакше перемагає Олена. Кожен з гравців прагне перемогти. З'ясуйте, хто за таких умов може забезпечити собі перемогу? Відповідь обґрунтуйте.

На виконання роботи відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів

Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Завдання

**II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2019-2020 н.р.**

9 клас

1. Знайдіть суму цифр числа $2^{2018} \cdot 5^{2019}$. Відповідь обґрунтуйте.
2. Пройшовши половину шляху автобус «Суми-Київ» збільшив швидкість на 25% і тому прибув у пункт призначення на півгодини раніше. З'ясуйте, за який час був пройдений весь шлях? Відповідь обґрунтуйте.
3. Знайдіть усі пари натуральних чисел (a, b) , що задовольняють рівності:
 $ab^3 + a^3 + b + 1 = 2019$.
4. На площині проведено 2019 прямих, жодні дві з яких не паралельні. Доведіть, що існує пара прямих, кут між якими не перевищує $0,1^\circ$.
5. Нехай AL – бісектриса трикутника ABC , O – центр описаного навколо цього трикутника кола, D – така точка на стороні AC , що $AD = AB$. Доведіть, що прямі AO і LD перпендикулярні.
6. На числовому промені зліва направо записані підряд усі натуральні числа: 1, 2, 3, Тарас і Софія грають у таку гру: вони по черзі (розпочинає Софія), послідовно, починаючи з 1, викреслюють записані числа за правилом: якщо на попередньому ході один із гравців викреслив n послідовних чисел, то інший гравець наступним ходом може викреслити або $n+1$, або $n-1$ натуральне число, починаючи з першого не викресленого. Перед початком гри Тарас визначає число $k \geq 2019$. Перемагає в грі той із гравців, хто своїм ходом викреслить число k . З'ясуйте, хто переможе за правильної гри обох гравців, якщо Софія першим ходом може викреслити від 1 до 10 перших чисел?

На виконання роботи відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів

Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Завдання

**II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2019-2020 н.р.**

10 клас

1. Обчислити значення виразу: $\sqrt{1 + 2019^2 + \frac{2019^2}{2020^2}} + \left(\frac{2020}{2019}\right)^{-1}$.

2. Уся родина випила по повному горнятку кави з молоком, причому Тарас випив чверть усього молока й шосту частину всієї кави. З'ясуйте, скільки осіб у родині? Відповідь обґрунтуйте.

3. Діагоналі розбивають опуклий чотирикутник на чотири трикутники, площі яких виражаються цілими числами. З'ясуйте, чи може добуток цих чотирьох площ закінчуватися впорядкованим набором 2019? Відповідь обґрунтуйте.

4. Для додатних чисел a, b доведіть нерівність: $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^{2018} + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^{2018} \geq 2^{2019}$.

5. Чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло та має перпендикулярні діагоналі. Точки K, L, M, Q – точки перетину висот трикутників ABD, ACD, BCD, ABC відповідно. Доведіть, що чотирикутники $KLMQ$ і $ABCD$ рівні.

6. З натуральних чисел 2, 3, 4, ..., 2019 якимось чином утворюють 1009 правильних дробів, далі серед цих дробів вибирають найбільший. З'ясуйте, яке найменше значення може мати цей найбільший дріб при усіх можливих побудовах таких дробів? Відповідь обґрунтуйте.

На виконання роботи відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів

Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Завдання

II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2019-2020 н.р.

11 клас

1. Знайдіть передостанню цифру виразу $2019^{2018} + 2019^{2019}$.

2. Нехай $f(x) = x^2 + 3x + 2$. Обчисліть:

$$\left(1 - \frac{2}{f(1)}\right) \left(1 - \frac{2}{f(2)}\right) \left(1 - \frac{2}{f(3)}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{f(2019)}\right).$$

3. Діагоналі розбивають опуклий чотирикутник на чотири трикутники, площі яких виражаються цілими числами. З'ясуйте, чи може добуток цих чотирьох площ закінчуватися впорядкованим набором 2019? Відповідь обґрунтуйте.

4. Знайдіть додатні числа $a_1, a_2, \dots, a_{2019}$, що задовольняють умову:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2019} = a_1 a_2 \dots a_{2019} = \sqrt[2018]{2019^{2019}}.$$

5. Основою прямокутного паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ є квадрат $ABCD$. Знайдіть найбільш можливу величину кута між прямою BD_1 і площиною BDC_1 .

6. З'ясуйте, при яких a нерівність $2019 \sin^5 x + 2017 \cos^7 x \geq a$ має безліч розв'язків? Відповідь обґрунтуйте.

На виконання роботи відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів

Використання цифрових пристроїв не дозволяється