Слава Україні!!!

Міністерство освіти і науки України
Національний центр "Мала академія наук України"
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

III етап Всеукраїнської олімпіади з математики

LXXX Київська міська олімпіада юних математиків

Умови та розв'язаня задач

1 тур

Київ, 19 січня 2025 року

«Здоровий глузд в світі розподілений найкращим чином, бо усі вважають, що мають його гарну частину»
Рене Декарт

7 клас

1. Прямі FD та BE перетинаються в точці O. З точки O проведені також промені OA та OC, при цьому про кути, що утворилися, відомі такі умови: $\angle DOC = 36°$, $\angle AOC = 90°$, $\angle AOB = 4x$ та $\angle FOE = 5x$, як це показане на рис. 1. Чому дорівнює градусна міра величини x?

Відповідь: $14°$.

Розв'язання. Величина $\angle BOC$ з вертикальних кутів $\angle BOD$ та $\angle EOF$ дорівнює $5x - 36°$. А з прямого кута $\angle AOC$ та ж саме величина дорівнює $90° - 4x$. Звідси знаходимо, що

$$5x - 36° = 90° - 4x \Rightarrow 9x = 126° \Rightarrow x = 14°.$$

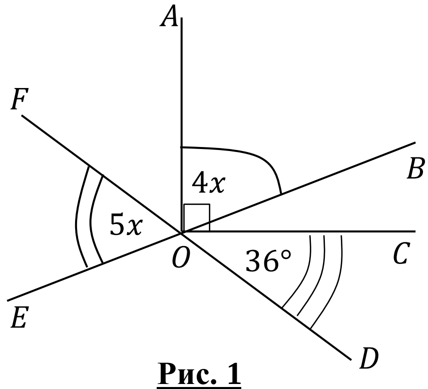

Рис. 1

2. Доведіть, що число $3\underbrace{99\dots9}_{2025}6\underbrace{00\dots0}_{2025}1$ є квадратом натурального числа.

Розв'язання. Припустимо, що це число містить n цифр 9 та n цифр 0. Покажемо, що тоді воно дорівнює числу $(2 \cdot 10^{n+1} - 1)^2$. Дійсно:

$$(2 \cdot 10^{n+1} - 1)^2 = 4 \cdot 10^{2n+2} - 4 \cdot 10^{n+1} + 1 = 4 \cdot 10^{n+1} \cdot (10^{n+1} - 1) + 1 = 3\underbrace{99\dots9}_{n}6\underbrace{00\dots0}_{n}1,$$

в чому легко переконатися простим відніманням в стовпчик.

3. У чемпіонаті факультету кібернетики з футболу взяли участь $n \geq 3$ команд. Змагання пройшли в одне коло, тобто кожна команда зіграла проти кожної іншої рівно 1 раз. За перемогу в матчі нараховується 3 очки, за поразку очок не нараховується, за нічию команди отримують по 1 очку. Виявилося, що переможцем стала команда, яка набрала очок більше ніж будь-яка інша команда, та в якої перемог було не більше ніж поразок. При якому найменшому n таке могло відбутися?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: $n = 5$.

Розв'язання. Спочатку покажемо приклад, що для $n = 5$ таке дійсно можливо (рис. 2). Тут ми показали числом 3 – перемогу команди, 1 – нічию та числом 0 – поразку. Як бачимо, команда переможець має 2 поразки та 2 перемоги і набрала 6 очок, а усі інші команди набрали по 5 очок.

Ком	I	II	III	IV	V	**Рез**
I	XX	3	3	0	0	**6**
II	0	XX	1	3	1	**5**
III	0	1	XX	1	3	**5**
V	3	0	1	XX	1	**5**
V	3	1	0	1	XX	**5**

Рис. 2

Для $n = 3$ команди зіграли по 2 гри. Команда переможець якщо має обидві нічиї, то вона очевидно не могла набрати більше очок ніж кожна з інших. Якщо в неї були перемога та поразка, то вона не набере більше очок ніж та команда, що її обіграла. Тобто це неможливо.

Для $n = 4$ команди зіграли по 3 гри. Команда переможець очевидно не може мати усі 3 нічиї, бо тоді не менше 3 очок буде мати принаймні ще одна команда. Значить вона має по одній перемозі, нічиї та поразці. Разом – 4 очки. Команда, що її обіграла вже має 3 очки, тому інші 2 зустрічі мала програти. Але це означає, що її обіграла і команда, що зіграла внічию з переможцем, тобто має не менше 4 очок, що суперечить умові визначення переможця. Тобто і тут ситуація неможлива.

4. Олексій записав на дошку деякі $2n$ $(n > 1)$ послідовних натуральних чисел. Після цього він розбив їх на пари деяким чином і числа в кожній парі перемножив. Отримані n добутків він написав на дошку замість початкових чисел. Після цього Антон виписав різницю між найбільшим та найменшим з написаних чисел. Олексій хоче, щоб Антон виписав якомога менше число. Яким воно може бути?

(Олексій Масалітін, Антон Тригуб)

Відповідь): $n(n-1)$.

Розв'язання. Позначимо деякі $2n$ послідовних чисел як $x, x+1, \dots, x+2n-1$. Добуток в парі, в якій знаходиться x, не може бути більшим за $A = x(x+2n-1)$. В той же час, розглянемо $n+1$ число $x+n-1, x+n, \dots, x+2n-1$: з принципу Діріхле принаймні два з них будуть в одній парі, тому добуток в ній не менший за $B = (x+n-1)(x+n)$. Отже, різниця між максимумом та мінімумом не менша за

$$B - A = (x+n-1)(x+n) - x(x+2n-1) = n(n-1).$$

Залишається навести приклад, де така різниця досягається. Нехай з самого початку Олексій записав числа від 1 до $2n$ та поділив їх на пари таким чином: $(1,2n), (2,2n-1), \dots, (n,n+1)$. Тоді на дошку він запише такі n добутків:

$$2n = 1 \cdot 2n < 2 \cdot (2n-1) < \ \dots \ < n(n+1) = n^2 + n.$$

Різниця між найбільшим та найменшим як раз і дорівнює $n^2 + n - 2n = n(n-1)$.

3.1. Петрик написав у рядок в деякому порядку числа $1, 2, \dots, 10$. Василь має право поміняти місцями пару сусідніх чисел, якщо ліве число у цій парі більше за праве. Яку найбільшу кількість таких змін у парах може зробити Василь?

Відповідь: 45.

Розв'язання. Якщо Петрик розставить числа у порядку спадання: $10, 9, \dots, 1$, то Василь може зробити $9 + 8 + \dots + 1 = 45$ змін. Наприклад, спочатку він робить 9 змін у парі, де це можна та одним з елементів пари є число 1. Далі робимо 8 замін в усіх парах з число 2 і так далі.

Більше змін зробити неможливо, бо у кожній парі чисел така зміна можлива не більше одного разу. В наведеній схемі відбувається зміна у кожній можливій парі.

4.1. Знайдіть усі натуральні числа a, b, c, що задовольняють таким умовам:

$$a + b + c = 16, abc = 120, a < b < c.$$

Відповідь: 3, 5 та 8.

Розв'язання. Бачимо, що $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. Таким чином шуканими числами можуть бути числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 або 12.

Якщо серед чисел є число 12, то два інших мають давати добуток 10 та суму 4 – не існує.

Якщо серед чисел є число 10, то два інших мають давати добуток 12 та суму 6 – не існує.

Якщо серед чисел немає числа 8, то найбільшими можуть бути 4, 5 та 6, але їхня сума 15, що менше заданої в умові. Таким чином одне з чисел – це 8. Сума двох інших також 8 та їх добуток дорівнює 15, звідки й знаходимо шукану трійку чисел: 3, 5 та 8.

8 клас

1. Знайдіть усі натуральні числа a, b, c, що задовольняють рівності:

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = 20,25.$$

Відповідь: $a = 20, b = 3, c = 1$.

Розв'язання. Оскільки $b + \frac{1}{c} > 1$, то $\frac{1}{b+\frac{1}{c}} < 1$, то $a = 20$, бо інакше ліва частина рівності не може бути більше 20 та менше 21. Звідси маємо, що $\frac{1}{b+\frac{1}{c}} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \Rightarrow b + \frac{1}{c} = 4$. Число $\frac{1}{c}$ має бути натуральним, а це можливо лише за умови, що $c = 1$. Тоді $b = 3$.

2. Чи можна записати в кожну комірку таблиці 45×45 натуральні числа від 1 до 2025 так, щоб кожне число було використане рівно один раз, і при цьому, щоб кожне записане число було або більшим за усі числа, що розташовані в сусідніх по стороні комірках, або меншим за усі числа, що розташовані в сусідніх по стороні комірках?

(Антон Тригуб)

Відповідь: так.
Розв'язання. Пофарбуємо числа в шаховому порядку. Скажімо, чорних клітин вийшло 1012. Розставимо числа від 1 до 1012 в чорних клітинах, і числа від 1013 до 2025 в білих. Тоді кожне число в чорній клітині менше за всіх сусідів, а кожне число в білій клітині більше за всіх сусідів.

3. Для якого найменшого натурального числа $n > 3$ не існує (не обов'язково опуклий) n-кутник, у якого всі діагоналі рівні? *Діагоналлю* довільного многокутника називається відрізок, що з'єднує будь-які дві не сусідні вершини цього многокутника.

(Антон Тригуб)

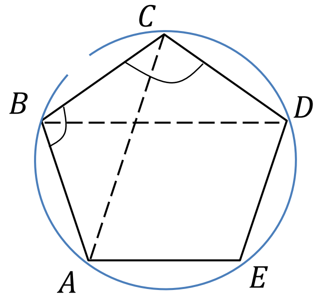

Рис. 3

Відповідь. $n = 5$.
Розв'язання. У квадрата діагоналі очевидно рівні.
Поділимо коло на 5 рівних частин точками A, B, C, D та E (за рухом годинникової стрілки). Тоді усі кути п'ятикутника $ABCDE$ рівні, а також рівними є його сторони, що спираються на однакові дуги, тобто $AB = BC = CD = DE = EA$ (рис. 3). Далі легко побачити, що $\Delta ABC = \Delta BCD$ за двома сторонами та кутом між ними. Звідси $AC = BD$, тобто ці діагоналі рівні, як рівні їм і усі інші діагоналі.

Припустимо, що існує шестикутник $ABCDEF$, що має рівні діагоналі. Тоді $\Delta ABD = \Delta ABE$ за трьома сторонами. Таким чином, або точки D та E співпадають, що неможливо для шестикутника, або ці трикутники розташовані, як на рис. 4. Але тоді сторони AB та DE перетинаються, що також неможливо для шестикутника. Одержана суперечність завершує доведення.

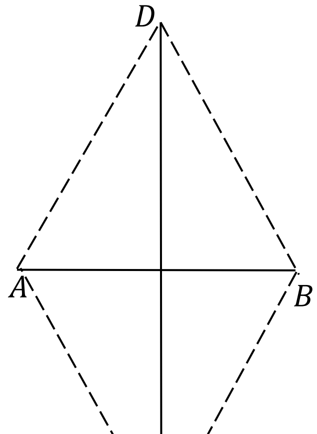

Рис. 4

4. Задача **7.4.**

5. Знайдіть усі такі четвірки натуральних чисел (a, p, q, r), де p, q, r – прості числа, що справджується рівність:

$$p^2q^2 + q^2r^2 + r^2p^2 + 3 = 4 \cdot 13^a.$$

(Олексій Масалітін)

Відповідь. $a = 2$, (p, q, r) – довільна перестановка чисел $(2, 3, 7)$.
Розв'язання. Припустимо, що серед чисел (p, q, r) немає числа 2. Тоді усі ці числа непарні, а тому й добутки pq, qr та pr так само непарні. Звідси випливає, що $p^2q^2 \equiv q^2r^2 \equiv r^2p^2 \equiv 1 \pmod 4$. Але тоді ліва частина заданої рівності має остачу 2 при діленні на 4, а права частина – кратна 4. Отримана суперечність показує, що серед цих чисел є число 2.
Припустимо, що серед чисел (p, q, r) немає числа 3. Тоді усі ці числа не діляться на 3, а тому й добутки pq, qr та pr так не кратні 3. Звідси випливає, що $p^2q^2 \equiv q^2r^2 \equiv r^2p^2 \equiv 1 \pmod 3$. Але тоді ліва частина заданої рівності ділиться націло на 3, а права частина – ні. Отримана суперечність показує, що серед цих чисел є число 3.
Таким чином серед чисел p, q, r є і 2, і 3. Без обмеження загальності покладемо $q = 3$ та $r = 2$. Тоді задана рівність набуває такого вигляду: $13p^2 + 39 = 4 \cdot 13^a$, а тому $p^2 + 3 = 4 \cdot 13^{a-1}$. Якщо $a - 1$ – парне, то $4 \cdot 13^{a-1} - p^2 = 3$, тобто різниця двох квадратів дорівнює 3, що можливо лише за умови $p = 1$ – суперечність. Таким чином $a - 1$ – непарне. Тоді

$$p^2 + 3 = 4 \cdot 13^{a-1} \equiv 4 \cdot (-1)^{a-1} \equiv -4 \equiv 3 \pmod 7.$$

Звідки випливає, що $p \vdots 7$, а тому $p = 7$. Але тоді $4 \cdot 13^{a-1} = 52$, звідки $a = 2$.

4.1. Петрик, Василь та Грицько їздили на велосипедах по одному кільцевому треку в одному напрямі. Відомо, що швидкість Петрика 30 км/год, а Василя – 20 км/год. Яка швидкість Грицька, якщо відомо, що вони одночасно стартували з однієї точки і в тій самій точці одночасно фінішували, при цьому за цей час Петрик 8 разів випередив Грицька, а Василь – двічі випередив Грицька?

Відповідь: 15 км/год.
Розв'язання. Позначимо S – довжину кола. Тоді Петрик проїхав на 9 кіл більше ніж Грицько, а Василь – на 3 кола більше, ніж Грицько. Таким чином, якщо v – швидкість Грицька, то

$$30t - vt = 9S, 20t - vt = 3S \Rightarrow \frac{3S}{t} = 20 - v = 10 - \frac{v}{3} \Rightarrow \frac{2v}{3} = 10 \Rightarrow v = 15.$$

5.1. Знайдіть принаймні одну таку четвірку натуральних чисел (a, b, c, d), що задовольняє умові:

$$a^{2021} + b^{2023} = 11(c^{2022} + d^{2024}).$$

Відповідь: наприклад, $a = 11^{2021}$, $b = 11^{2023}$, $c = 11^{2020}$, $z = 11^{2022}$.
Розв'язання. Будемо шукати числа у такому вигляді: $a^{2021} = 11c^{2022}$, $b^{2023} = 11d^{2024}$. Для цього достатньо покласти $a = 11^x$, $b = 11^y$, $c = 11^z$, $z = 11^t$. Тоді

$$a^{2021} = 11c^{2022} \Rightarrow 11^{2021x} = 11 \cdot 11^{2022z} \Rightarrow 2021x = 2022z + 1.$$

Тепер можемо вибрати $x = 2021$ та $z = 2020$.
Повністю аналогічно для другої пари:

$$b^{2023} = 11d^{2024} \Rightarrow 11^{2023y} = 11 \cdot 11^{2024t} \Rightarrow 2023y = 2024t + 1.$$

І вибираємо $y = 2023$ та $t = 2022$.

9 клас

1. Скільки існує трицифрових чисел, які не мають нуля у запису та з сумою цифр 7?

Відповідь: 15.
Розв'язання. Розглянемо випадки найбільшої цифри шуканого числа. Вона не може бути більшою 5 та меншою 3, оскільки $6 + 1 + 1 > 7$ та $2 + 2 + 2 < 7$.
Найбільша цифра 5, то таких чисел 3: 511 та ще дві перестановки.
Найбільша цифра 4, то дві інші цифри 2 та 1, тому таких чисел 6.
Найбільша цифра 3, то можливі варіанти 331 та 322, кожних з яких по 3.
Разом маємо 15.

2. Чи можна числа від 1 до 2025 розставити по колу таким чином, щоб різниця між кожними двома сусідніми числами мала вигляд 2^k для деяких цілих невід'ємних чисел k? Для різних сусідніх пар чисел числа k можуть бути різними.

(Антон Тригуб)

Відповідь: так.
Розв'язання: Приклад: $1, 3, 5, \dots, 2025, 2024, 2022, \dots, 2$. Всі різниці між сусідніми числами рівні $1 = 2^0$ чи $2 = 2^1$.

3. Точка $H -$ точка перетину висот гострокутного трикутника ABC, $AD -$ його висота. До кола з центром у точці A та радіусом AD проведено дотичні з точок B і C, які не співпадають з прямою BC. Ці дотичні перетинаються в точці P. Доведіть, що радіус вписаного кола ΔBCP дорівнює HD.

(Данило Хілько)

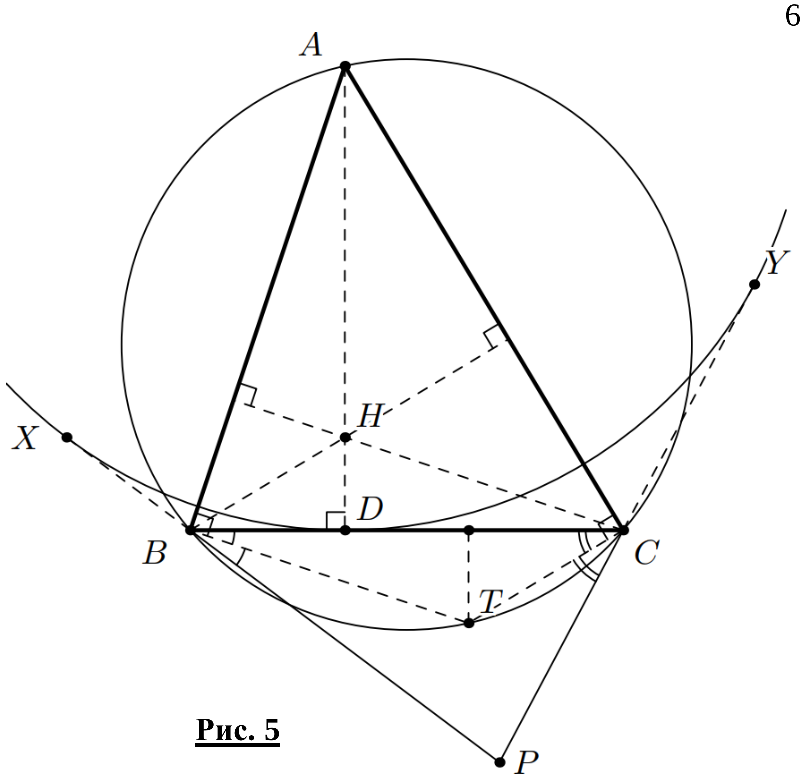

Рис. 5

Розв'язання. Зрозуміло, що BC дотикається до кола з центром A і радіусом AD в D (рис. 5). Нехай $X, Y -$ точки дотику других дотичних до цього кола, що проведені з B і C відповідно. За умовою XB перетинає YC в P. З симетрії $BA-$ бісектриса кута $XBC, CA -$ бісектриса кута BCY. Тоді $\angle XBC + \angle BCY = 2(\angle ABC + \angle ACB) > 180°$, бо трикутник ABC гострокутний. Тоді точки P і A лежать в різних півплощинах відносно BC і BA, CA є бісектрисами зовнішніх кутів трикутника BCP. Проведемо бісектриси кутів $\angle CBP$ і $\angle BCP$, що перетинаються в T. Вони є перпендикулярними зовнішнім бісектрисам, тобто BA, CA відповідно. Отже, вони перетинаються на описаному колі трикутника ABC в точці, що є діаметрально протилежною A. Зрозуміло, що T є також інцентром трикутника BCP. Зауважимо тепер, що $BT \parallel CH$ і $CT \parallel BH$ як прямі, перпендикулярні AB, AC відповідно. Звідси чотирикутник $BHCT$ паралелограм, трикутники BHC і BTC рівні, а тому перпендикуляр, що опущено з T на BC рівний HD як висоти рівних трикутників. Зрозуміло, що цей перпендикуляр рівний радіусу вписаного кола трикутника BCP.

4. Попарно різні дійсні числа a, b, c задовольняють таку умову:
$$\frac{a-b}{a^3b^3} + \frac{b-c}{b^3c^3} + \frac{c-a}{c^3a^3} = 0.$$
Чому може дорівнювати значення виразу
$$\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}?$$
(Вадим Соломка)

Відповідь. 2.

Розв'язання. Після зведення до спільного знаменника маємо:
$$\frac{a-b}{a^3b^3} + \frac{b-c}{b^3c^3} + \frac{c-a}{c^3a^3} = 0 \iff$$
$$c^3(a-b) + a^3(b-c) + b^3(c-a) = (b-a)(c-b)(a-c)(a+b+c) = 0.$$
Оскільки з умови задачі випливає, що $(b-a)(c-b)(a-c) \neq 0$, то $a+b+c=0$, звідки маємо, що
$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) = 0.$$
Якщо при цьому $ab+bc+ac=0$, то $a^2+b^2+c^2=0$ і $a=b=c=0$, що суперечить умові. Отже маємо: $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ac} = -2$. Далі отримуємо, що
$$(ab+bc+ac)^2 = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c) = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2,$$
та одночасно з цим
$$(a^2+b^2+c^2)^2 = a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) = a^4+b^4+c^4+2(ab+bc+ac)^2,$$
тому
$$(-2)^2 = \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ac}\right)^2 = \frac{a^4+b^4+c^4}{(ab+bc+ac)^2} + 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{a^4+b^4+c^4}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} = \frac{a^4+b^4+c^4}{(ab+bc+ac)^2} = 4-2 = 2.$$

5. Деяке натуральне число має парну кількість дільників. Аня хоче розбити ці дільники на пари так, щоб добутки чисел в парах мали однакову кількість дільників. Доведіть, що вона може зробити це єдиним чином.

(Олексій Масалітін)

Розв'язання. Зрозуміло, що числа 1 та n є дільниками довільного натурального числа n. Припустимо, що вони не в одній парі, тоді деякий дільник d числа n в парі з 1, тому добуток чисел в цій парі d ділить n, але менше за n. Тоді добуток чисел в парі з n має більше дільників ніж d, що суперечить умові. Тоді 1 в парі з n, тому в кожній парі кількість дільників добутку дорівнює кількості дільників D числа n. Нехай n розкладається на прості як $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$. Позначимо пари дільників через $(d_1, d_2), (d_3, d_4), \ldots, (d_{2k-1}, d_{2k})$. Тоді для $i = \overline{1, 2k}$ позначимо розклад d_i на прості множники як $d_i = p_1^{\alpha_{1,i}} \cdot p_2^{\alpha_{2,i}} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_{m,i}}$. Тоді кількість дільників добутку пари (d_{2i-1}, d_{2i}) дорівнює

$$(\alpha_{1,2i-1} + \alpha_{1,2i} + 1)(\alpha_{2,2i-1} + \alpha_{2,2i} + 1) \ldots (\alpha_{m,2i-1} + \alpha_{m,2i} + 1).$$

Перемножимо всі вирази такого типу, отримаємо наступний вираз:

$$A = \prod_{j=1}^{m} (\alpha_{j,1} + \alpha_{j,2} + 1)(\alpha_{j,3} + \alpha_{j,4} + 1) \ldots (\alpha_{j,2k-1} + \alpha_{j,2k} + 1) \le \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\sum_{i=1}^{2k} \alpha_{j,i} + k}{k} \right)^k.$$

Нескладно помітити, що

$$\sum_{i=1}^{2k} \alpha_{j,i} = k\alpha_j$$

(бо дільники можна розбити на пари (d_x, d_y) з добутком n, в кожній з яких $\alpha_{j,x} + \alpha_{j,y} = \alpha_j$). Таким чином,

$$A \le \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{k\alpha_j + k}{k} \right)^k = D^k.$$

Але A є добутком кількості дільників добутків в кожній парі, тому $A = D^k$, тож в нерівностях вище досягаються рівності. Тому $\alpha_{j,2i-1} + \alpha_{j,2i} = \alpha_j$ для довільної пари i, j. Таким чином, добуток чисел в кожній парі дорівнює $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m} = n$. Але очевидно, що розбити дільники так, щоб добуток в кожній парі дорівнював n можна єдиним чином, причому таке розбиття очевидно задовольняє умові.

4.1. На яке найбільше просте число ділиться натуральне число

$$\frac{2 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! + \cdots + 2023 \cdot 2023!}{2022!}?$$

Символом $n!$ позначено добуток усіх натуральних чисел від 1 до n.

Відповідь: 23.

Розв'язання. ММІ доведемо, що

$$2 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! + \cdots + 2023 \cdot 2023! = 2024!.$$

Для $n = 2$ маємо, що $2 + 2 \cdot 2! = 3!$. Нехай для деякого n справджується рівність:

$$2 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)!.$$

тоді маємо, що

$$2 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! + \cdots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+1)! + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+2)!,$$

що й треба було довести.

Таким чином питання перетворилося в таке: який найбільший простий дільник числа

$$\frac{2024!}{2022!} = 2023 \cdot 2024 = 7 \cdot 17^2 \cdot 2^3 \cdot 11 \cdot 23.$$

Як бачимо шукане число 23.

5.1. На скільки нулів закінчується найменше число, що ділиться і на 2, і на 5, та має рівно 2021 дільник?

Відповідь: 43.

Розв'язання. Непарну кількість дільників має лише точний квадрат. Тому число має вигляд $N = 2^a \cdot 5^b \cdot n^c$, де числа a, b – парні натуральні, c – ціле невід'ємне і також парне. Тоді кількість дільників визначається за добре відомою формулою $M = (a+1)(b+1)m$, де множник m залежить від множників, на які розкладається число n. Оскільки $(a+1)(b+1)m = 2021 = 43 \cdot 47$. З того, що $a + 1 > 2$ та $b + 1 > 2$ випливає, що саме ці два множника мають дорівнювати $43 \cdot 47$, а $m = 1$, звідки випливає, що $c = 0$. Таким чином шуканих чисел усього два: $2^{43} \cdot 5^{47}$ та $2^{47} \cdot 5^{43}$. Неважко побачити, що меншим є друге з них, але обидва мають наприкінці 43 нулі.

10 клас

1. Задані 11 чисел, середнє арифметичне яких дорівнює 10. До кожного з перших чотирьох чисел додали 20, а від кожного з семи останніх відняли 24. Чому дорівнює середнє арифметичне нових 11 чисел?

Відповідь: 2.
Розв'язання. Сума цих 11 чисел дорівнює $11 \cdot 10 = 110$. Нова сума цих чисел стає такою:

$$110 + 4 \cdot 20 - 7 \cdot 24 = 22.$$

Звідси отримуємо, що середнє арифметичне нового набору з 11 чисел дорівнює 2.

2. Задача **9.2.**

3. Діаметр AD описаного кола трикутника ABC перетинає пряму BC у точці K. Точку D симетрично відобразили відносно точки K і отримали точку L. На прямій AB обрана така точка F, що $FL \perp AC$. Доведіть, що $FK \perp AD$.

(Матвій Курський)

Розв'язання. Нехай FL перетинає AC у точці N, а точка M середина CN (рис. 6). Оскільки $\angle DCA = 90°$, то $NLDC$ прямокутна трапеція. Тоді за теоремою Фалеса $LN \parallel KM \parallel DC$, тоді KM є висотою і медіаною у трикутнику NKC, отже трикутник NKC рівнобедрений ($\angle KNC = \angle KCN$). Тоді $\angle KNL = \angle KCD$, але з властивостей вписаних кутів $\angle KCD = \angle DAB$, тоді $\angle KNL = \angle DAB$, отже чотирикутник $KNAF$ вписаний, а отже $\angle FKA = \angle FNA = 90°$, що і потрібно було довести.

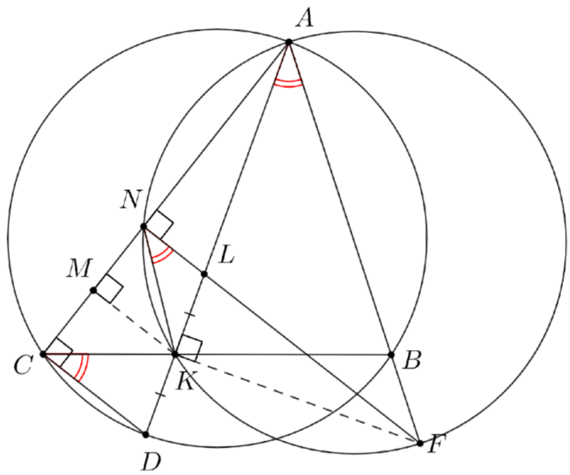

Рис. 6

4. Знайти всі такі функції $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для яких справджується умова: для будь-яких натуральних чисел m та n таких, що $m > n$ та m не ділиться на n, якщо ми позначимо через r остачу від ділення числа m на n, то число $f(m)$ при діленні на n дає остачу $f(r)$.

(Микита Харін)

Відповідь: $f(n) = 1$ або $f(n) = n$.
Розв'язання. Спочатку розглянемо пару $(2n+1, n+1)$ для якої перше число не ділиться на друге, та остача при діленні першого на друге дорівнює n. Тоді $f(2n+1)$ при діленні на $n+1$ дає остачу $f(n)$. Оскільки остача менша за дільник, то $f(n) < n + 1$, тобто $f(n) \le n$, зокрема $f(1) = 1$ та $f(2) \le 2$. Маємо 2 випадки.
Нехай $f(2) = 1$, тоді для довільного $n \ge 5$ розглянемо пари $(n, n-1)$ та $(n, n-2)$. Число n при діленні на другі числа дає відповідно остачі 1 та 2. Тоді $f(n)$ дасть для обох чисел остачу 1, тому $f(n) - 1$ ділиться на $n - 1$, та на $n - 2$, а оскільки ці числа взаємно прості, то і на $(n-1)(n-2)$. Але оскільки $0 \le f(n) - 1 \le n - 1 < (n-1)(n-2) - 1$, то $f(n) - 1 = 0$, тобто $f(n) = 1$. Тепер для того, щоб знайти $f(3)$ та $f(4)$ помітимо, що 9 при діленні на 6 та 5 дає відповідно остачі 3 та 4, тому з того,

що $f(9)=1$ маємо, що $f(3)=f(4)=1$, тому для всіх натуральних n: $f(n)=1$ і ця функція задовольняє умові.

Нехай $f(2)=2$, тоді для $n\geq 5$ та пар з попереднього випадку маємо вже відповідно остачі 1 та 2. Отже значення функції більше 1, а тому $n\geq f(n)\geq (n-1)+1=n$. Тому $f(n)=n$. Аналогічно можна знайти, що $f(3)=3$ та $f(4)=4$. Тому для всіх натуральних n: $f(n)=n$ і ця функція також задовольняє умові.

5. Дійсні числа a, b, c задовольняють такі умови: $1000<|a|<2000$, $1000<|b|<2000$, $1000<|c|<2000$ та $\frac{ab^2}{a+b}+\frac{bc^2}{b+c}+\frac{ca^2}{c+a}=0$. Чому може дорівнювати значення виразу

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}?$$

(Вадим Соломка)

<u>Відповідь</u>. -1.

<u>Розв'язання</u>. Покажемо, що за умови $1000<|a|,|b|,|c|<2000$ вираз $ab+bc+ca\neq 0$. Припустимо методом від супротивного, що $ab+bc+ac=0$. Тоді два з цих чисел мають мати однаковий знак, а третє протилежний. Без обмеження загальності вважатимемо, що $a, b>0$, $c<0$, інакше просто розглянемо протилежні числа. Тоді

$$(-c)(a+b)=ab\leq\frac{(a+b)^2}{4}\Rightarrow(-c)\leq\frac{a+b}{4}<1000$$

і отримали суперечність. Тепер запишемо:

$$\frac{ab^2}{a+b}+\frac{bc^2}{b+c}+\frac{ca^2}{c+a}=0\ \Leftrightarrow\ \frac{ab^2}{a+b}+bc+\frac{bc^2}{b+c}+ca+\frac{ca^2}{c+a}+ab=ab+bc+ca\ \Leftrightarrow$$

$$\frac{ab^2+abc+cb^2}{a+b}+\frac{bc^2+abc+ac^2}{b+c}+\frac{ca^2+abc+ba^2}{c+a}=ab+bc+ca\ \Leftrightarrow$$

$$\frac{b(ab+ac+bc)}{a+b}+\frac{c(bc+ab+ca)}{b+c}+\frac{a(ca+bc+ab)}{c+a}=ab+bc+ca\ \Leftrightarrow$$

$$\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}=1\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{\frac{a}{b}+1}+\frac{1}{\frac{b}{c}+1}+\frac{1}{\frac{c}{a}+1}=1\ \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{b}{c}+1\right)+\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{c}{a}+1\right)+\left(\frac{b}{c}+1\right)\left(\frac{c}{a}+1\right)=\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{b}{c}+1\right)\left(\frac{c}{a}+1\right)\ \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+1+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+1+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+1=1+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+1\ \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=-1,$$

що й треба було знайти.

<u>Зауваження</u>. Такі числа a, b, c насправді існують. Наприклад,

$$a=1002, b=1001, c=\frac{-2007006-\sqrt{8037056028}}{2002}\approx-1047.2805,$$

але для повного розв'язку учасникам <u>не</u> треба було наводити приклад.

4.1. Послідовність (a_n) будуємо таким чином: $a_1=\frac{10}{11}$; якщо дріб $a_n=\frac{p}{q}$ – нескоротній, то a_{n+1} – це дріб $\frac{p+2}{q+3}$ після того, як він стане нескоротнім. Тобто ми маємо, що $a_2=\frac{10+2}{11+3}=\frac{12}{14}=\frac{6}{7}$, $a_3=\frac{6+2}{7+3}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$, … . Визначте, чи існує найбільший індекс n, для якого член послідовності a_n будується скороченням відповідного дробу $\frac{p+2}{q+3}$.

<u>Відповідь:</u> так, такий індекс існує.

Розв'язання. Покажемо, що цей найбільший індекс – це $n = 4$. Знайдемо декілька перших членів послідовності: $a_1 = \frac{10}{11}$, $a_2 = \frac{10+2}{11+3} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$, $a_3 = \frac{6+2}{7+3} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, $a_4 = \frac{4+2}{5+3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, $a_5 = \frac{3+2}{4+3} = \frac{5}{7}$, $a_6 = \frac{5+2}{7+3} = \frac{7}{10}$, … Покажемо ММІ, що після $n \geq 5$ усі дробі будуть нескоротними. Для цього достатньо довести, що $a_n = \frac{1+2(n-3)}{1+3(n-3)}$ та що цей дріб не скоротний при $n \geq 5$. Для $n = 5$ все справджується. Нехай твердження справджується для $n - 1$, перевіримо його й для n.

$$a_n = \frac{1 + 2(n-4) + 2}{1 + 3(n-4) + 3} = \frac{1 + 2(n-3)}{1 + 3(n-3)}.$$

Припустимо, що існує d, для якого і чисельник $1 + 2(n-3)$, і знаменник $1 + 3(n-3)$ діляться націло на нього. Тоді і такий вираз має ділитися націло на d

$$3 \cdot \big(1 + 2(n-3)\big) - 2 \cdot \big(1 + 3(n-3)\big) = 1 \Rightarrow d = 1,$$

тобто дріб не скоротний, що й завершує доведення.

5.1. Додатні числа x, y, z задовольняють умову $x + 3y + 5z = 72$. Яке найменше значення може приймати вираз $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} + \frac{5}{z}$?

Відповідь: $\frac{9}{8}$.

Розв'язання. З нерівності Коші-Буняковського

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

для $n = 3$ та $a_1 = \sqrt{\frac{1}{x}}$, $a_2 = \sqrt{\frac{3}{y}}$, $a_3 = \sqrt{\frac{5}{z}}$, $b_1 = \sqrt{x}$, $b_2 = \sqrt{3y}$, $b_3 = \sqrt{5z}$ матимемо, що

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{y} + \frac{5}{z}\right)(x + 3y + 5z) \geq (1 + 3 + 5)^2 = 81 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{3}{y} + \frac{5}{z} \geq \frac{81}{72} = \frac{9}{8}.$$

Залишається показати, що це значення досягається. З нерівності Коші-Буняковського рівність досягається при пропорційних компонентах. Тобто за умови:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\frac{1}{x}}} = \frac{\sqrt{3y}}{\sqrt{\frac{3}{y}}} = \frac{\sqrt{5z}}{\sqrt{\frac{5}{z}}} \Rightarrow x = y = z \Rightarrow x + 3y + 5z = 9x = 72 \Rightarrow x = y = z = 8.$$

Для цих значень маємо, що $x + 3y + 5z = 72$ та $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{9}{8}$.

11 клас

1. Знайдіть усі трицифрові числа, що у 5 разів більші за добуток своїх цифр.

Відповідь: 175.

Розв'язання. Припустимо, що шукане число дорівнює $\overline{abc}$. Тоді має справджуватися рівність:

$$100a + 10b + c = 5abc \Rightarrow c \ \vdots\ 5.$$

Випадок 1. $c = 0 \Rightarrow \overline{abc} = 0$ – не є трицифровим.

Випадок 2. $c = 5 \Rightarrow 100a + 10b + 5 = 25ab \Rightarrow 20a + 2b + 1 = 5ab$. Звідси випливає, що a, b – непарні числа. Крім того, оскільки $2b + 1 = 5a(b - 4)$, звідки $b \geq 5$ та $2b + 1$ – кратне 5. Звідки єдина можливість $b = 7$. Тоді маємо рівність: $20a + 15 = 35a \Rightarrow a = 1$. Таким чином шукане число єдине та дорівнює 175.

2. На дошці виписані усі натуральні числа від 1 до 2025. Михайло та Олексій грають у таку гру. Вони по черзі, починає Михайло, стирають з дошки одне з записаних на ній чисел. Гра закінчується, коли на дошці лишається рівно два числа. Якщо їх сума є точним квадратом цілого числа, виграє Михайло, інакше – виграє Олексій. Хто виграє при правильній грі обох гравців?

(Федір Юдін)

Відповідь: Михайло.
Розв'язання. Першим ходом Михайло стирає з дошки число 2025. Тепер, Михайло розбиває всі інші числа на пари вигляду $(x, 2025 - x)$, і якщо Олексій стирає одне число з пари, Михайло стирає інше. Таким чином, сума останніх двох чисел на дошці буде $2025 = 45^2$.

3. Задача **10.3.**

4. Задача **9.5.**

5. Визначте найбільшу можливу константу C таку, що для довільних дійсних чисел x, y, z, які є сторонами трикутника, справджується нерівність
$$\frac{xy}{x^2+y^2+xz}+\frac{yz}{y^2+z^2+yx}+\frac{zx}{z^2+x^2+zy} \geq C.$$
(Вадим Соломка)

Відповідь. $\frac{1}{2}$.
Розв'язання. Розглянемо випадок, коли $x = y$, а z прямує до 0. Зрозуміло, що трикутник з такими сторонами завжди існує. Тоді маємо, що
$$\frac{xy}{x^2+y^2+xz}+\frac{yz}{y^2+z^2+yx}+\frac{zx}{z^2+x^2+zy} \to \frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}.$$
Таким чином, якщо $C > \frac{1}{2}$, то існують шукані числа x, y та z, для яких
$$\frac{xy}{x^2+y^2+xz}+\frac{yz}{y^2+z^2+yx}+\frac{zx}{z^2+x^2+zy} < C.$$

Тепер доведемо, що для всіх припустимих значень x, y, z
$$\frac{xy}{x^2+y^2+xz}+\frac{yz}{y^2+z^2+yx}+\frac{zx}{z^2+x^2+zy} > \frac{1}{2}$$
Справді, з наслідку з теореми Коші-Буняковського маємо, що
$$\frac{x^2y^2}{xy(x^2+y^2+xz)}+\frac{y^2z^2}{yz(y^2+z^2+yx)}+\frac{z^2x^2}{zx(z^2+x^2+zy)} \geq$$
$$\geq \frac{(xy+yz+zx)^2}{xy(x^2+y^2+xz)+yz(y^2+z^2+yx)+zx(z^2+x^2+zy)}.$$
Тепер помітимо, що
$$xy(x^2+y^2+xz)+yz(y^2+z^2+yx)+zx(z^2+x^2+zy)=(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx).$$
Отже маємо
$$\frac{xy}{x^2+y^2+xz}+\frac{yz}{y^2+z^2+yx}+\frac{zx}{z^2+x^2+zy} \geq \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}.$$

Залишилось показати, що, якщо x, y, z є сторонами якогось трикутника, то $\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} > \frac{1}{2}$.
Справді, оскільки це сторони якогось трикутника, то існують додатні a, b, c такі, що $x = b + c, y = a + c, z = a + b$. Тоді
$$\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{(a+b)(a+c)+(b+a)(b+c)+(c+a)(c+b)}{(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2}=$$
$$=\frac{(a^2+b^2+c^2)+3(ab+bc+ac)}{2(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ac)} > \frac{(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ac)}{2(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ac)}=\frac{1}{2}$$

4.1. Задача **9.5.1.**

5.1. Знайдіть усі трійки дійсних чисел (a, b, c), що задовольняють умовам:
$$(2a+1)^2-4b=(2b+1)^2-4c=(2c+1)^2-4a=5.$$

Відповідь: $(1, 1, 1)$ та $(-1, -1, -1)$.
Розв'язання. Система еквівалентна такій

$$a^2 + a - b = b^2 + b - a = c^2 + c - a = 1.$$

Якщо їх усі додати, то матимемо, що $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. З іншого боку:

$$a(a+1) = b+1,$$
$$b(b+1) = c+1,$$
$$c(c+1) = a+1.$$

Перемножимо останні рівності і матимемо, що

$$abc(a+1)(b+1)(c+1) = (a+1)(b+1)(c+1).$$

Якщо жодне з чисел a, b, c не дорівнює (-1), то після скорочення маємо, що $abc = 1$. Тоді з нерівності між середнім арифметичним і середнім геометричним для невід'ємних чисел $|a|$, $|b|$ та $|c|$ отримуємо:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{|abc|} = 3.$$

Таким чином рівність можлива лише за умови $|a| = |b| = |c| = 1$. Виходячи з випадку, що ми розглядаємо, отримуємо, що $a = b = c = 1$. Неважко переконатись, що це є одним із розв'язків.
Якщо ж, наприклад, $a = -1$, то із заданих рівнянь миттєво отримуємо, що $b = c = -1$, що також є розв'язком.