

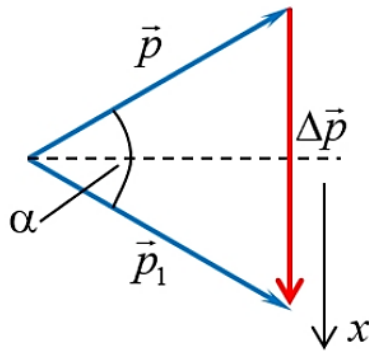
**Завдання II етапу Всеукраїнської олімпіади з фізики
(2021-2022 навчальний рік)
11 клас**

Завдання 1 (11 клас)

Космічний корабель рухається з деяким імпульсом \vec{p} . Після зміни курсу на кут α до початкового напрямку, модуль імпульсу корабля не змінився. На який найменший час капітан корабля включив двигун з силою тяги F та як орієнтував вісь двигуна?

Розв'язок

Зобразимо схематично зміну імпульса космічного корабля.



Виберемо напрямок координатної осі x вздовж вектора $\Delta \vec{p}$.

Імпульс корабля після роботи двигуна з силою тяги F упродовж часу Δt дорівнюватиме:

$$\vec{p}_1 = \vec{p} + \Delta \vec{p}.$$

Спроектуємо складові виразу на координатну вісь x та отримаємо вираз:

$$\Delta p = 2p \sin \frac{\alpha}{2}. \quad [1]$$

Зміну імпульса корабля визначимо за II законом Ньютона:

$$\Delta \vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

Спроектуємо складові виразу на координатну вісь x :

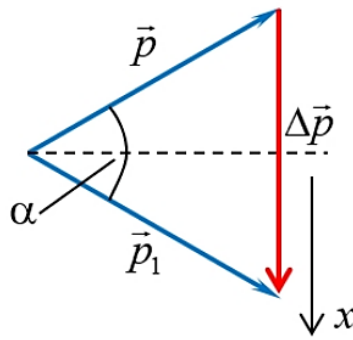
$$\Delta p = F \cdot \Delta t \quad [2]$$

Прирівняємо вирази [1] та [2]:

$$F \cdot \Delta t = 2p \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Звідси, } \Delta t = \frac{2p \sin \frac{\alpha}{2}}{F}.$$

Вісь двигуна необхідно орієнтувати до початкового напрямку під кутом $\beta = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$.



Завдання 2 (11 клас)

У посудину об'ємом 10 л, що заповнена сухим повітрям при нормальних умовах, вводять 3 г води й нагрівають до 100°C . Визначити тиск вологого повітря в посудині при цій температурі.

Дано відома. Стала Больцмана $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$. Нормальні умови – атмосферний тиск $P_0 = 10^5 \text{ Па}$, температура $T_0 = 273 \text{ К}$.

Розв'язок

При температурі $T = 100^{\circ}\text{C} = 373 \text{ К}$ вода випаровується та перетворюється у водяну пару. Вологе повітря – це суміш сухого повітря та водяної пари. Тиск суміші газів розраховується як сума парціальних тисків сухого повітря $P_{\text{п}}$ та водяної пари $P_{\text{в}}$:

$$P = P_{\text{п}} + P_{\text{в}}. \quad [1]$$

Парціальний тиск водяної пари розрахуємо з рівняння Менделєєва-Клапейрона:

$$P_{\text{в}} V = \frac{m}{M} RT,$$

де $V = 10 \text{ л} = 10^{-2} \text{ м}^3$ – об'єм посудини, $m = 3 \text{ г}$ – маса води, $M = 18 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ – молярна маса води, R – стала Больцмана.

Звідси,

$$P_{\text{в}} = \frac{mRT}{MV} \quad [2]$$

Аналогічно повітря при 100°C буде створювати парціальний тиск:

$$P_{\text{п}} = \frac{\nu_{\text{п}} RT}{V}, \quad [3]$$

де $\nu_{\text{п}}$ – кількість сухого повітря в посудині.

Кількість сухого повітря у посудині визначимо за допомогою рівняння Менделєєва-Клапейрона за нормальних умов:

$$P_0 V = \nu_{\text{п}} RT_0,$$

де $P_0 = 10^5 \text{ Па}$, $T_0 = 273 \text{ К}$.

Звідси,

$$\nu_{\text{п}} = \frac{P_0 V}{RT_0}. \quad [4]$$

Підставимо вираз [4] у вираз [3]:

$$P_{\Pi} = \frac{P_0 V}{RT_0} \cdot \frac{RT}{V} = \frac{P_0 T}{T_0}. \quad [5]$$

Підставимо вирази [2] та [5] у вираз [1]:

$$P = \frac{mRT}{MV} + \frac{P_0 T}{T_0}. \quad [6]$$

$$P = \frac{3 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 373 \text{ К}}{18 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}} \cdot 10^{-2} \text{ м}^3} + \frac{10^5 \text{ Па} \cdot 373 \text{ К}}{273 \text{ К}} \approx 189 \text{ кПа}.$$

Завдання 3 (11 клас)

На внутрішній поверхні конуса на відстані l від його вершини знаходяться в стані спокою навпроти один одного два тіла з однаковими позитивними зарядами і однаковими масами. Вісь конуса вертикальна, кути при вершині конуса 2α . Якщо на тіла подіяти однорідним електричним полем із напруженістю не більше E та направленим вздовж сили тяжіння, тіла починають рухатися вниз. Яким повинно бути поле, направлене догори, щоби тіла рухалися по поверхні конуса вгору?

Розв'язок

Будемо вважати, що тіла в обох випадках рухалися рівномірно. Розглянемо динаміку руху одного з тіл у кожному випадку.

На тіло діють сили (рис. 1,2):

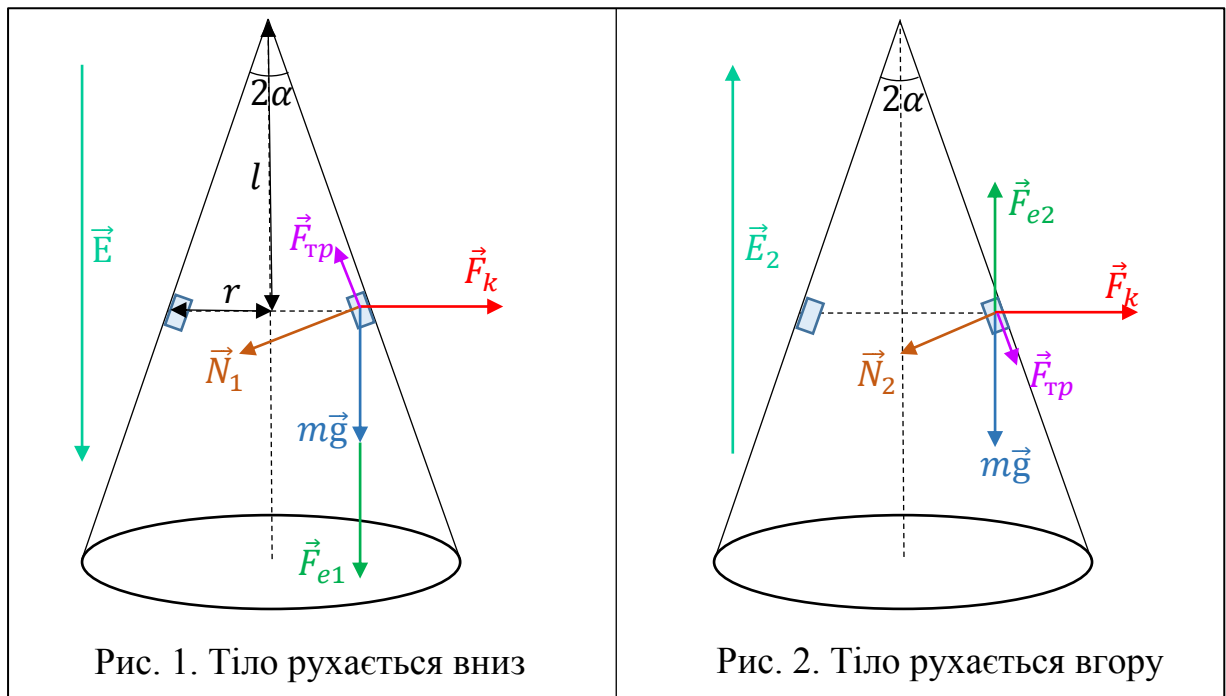
- сила тяжіння – $m\vec{g}$;
- сила тертя – $\vec{F}_{\text{тр}}$;
- сила реакції опори – \vec{N}_1 або \vec{N}_2 ;
- сила Кулона – \vec{F}_k (за законом Кулона:

$$F_k = k \frac{q^2}{(2r)^2} = k \frac{q^2}{(2l \cdot \text{tg} \alpha)^2} = k \frac{q^2}{4l^2 \cdot \text{tg}^2 \alpha}; \quad [1]$$

- сила, з якою зовнішнє електричне поле діє на тіло – \vec{F}_{e1} або \vec{F}_{e2} :

$$\text{під час руху тіла вниз} - F_{e1} = qE, \quad [2]$$

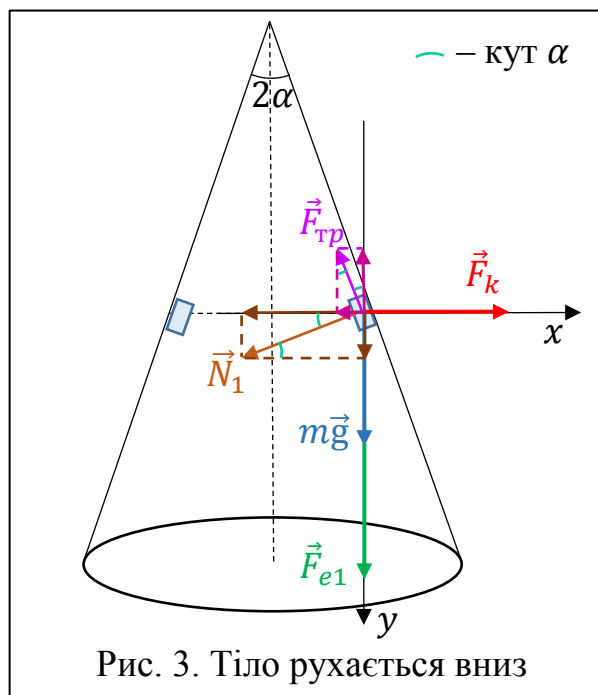
$$\text{під час руху тіла вгору} - F_{e2} = qE_2. \quad [3]$$



Запишемо II закон Ньютона для тіла, яке рухається вниз.

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N}_1 + \vec{F}_k + \vec{F}_{e1} = 0$$

Виберемо координатні осі (рис. 3) та запишемо дане рівняння у скалярному вигляді.



$$Ox: -F_{\text{тр}} \sin \alpha - N_1 \cos \alpha + F_k = 0$$

$$Oy: mg - F_{\text{тр}} \cos \alpha + N_1 \sin \alpha + F_{e1} = 0$$

Із цієї системи рівнянь виразимо силу тертя:

$$F_{\text{тр}} = F_k \sin \alpha + F_{e1} \cos \alpha + mg \cos \alpha.$$

[4]

Запишемо II закон Ньютона для тіла, яке рухається вгору.

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N}_2 + \vec{F}_k + \vec{F}_{e2} = 0$$

Виберемо координатні осі (рис. 3) та запишемо дане рівняння у скалярному вигляді.

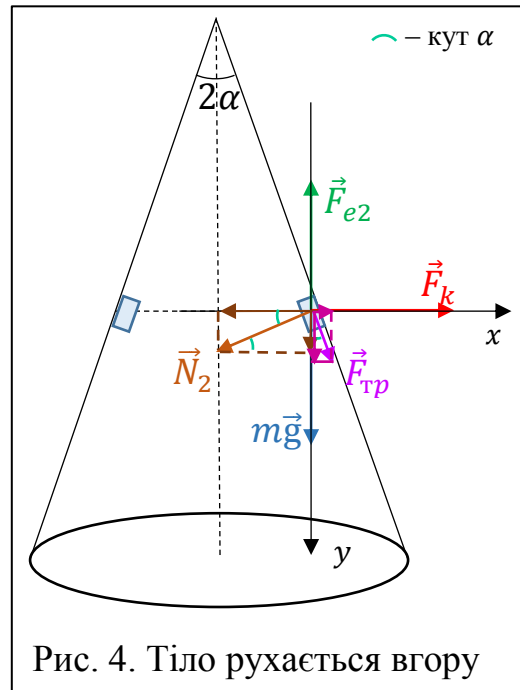


Рис. 4. Тіло рухається вгору

$$Ox: F_{\text{тр}} \sin \alpha - N_2 \cos \alpha + F_k = 0$$

$$Oy: mg + F_{\text{тр}} \cos \alpha + N_2 \sin \alpha - F_{e2} = 0$$

Із цієї системи рівнянь визначимо силу тертя:

$$F_{\text{тр}} = F_{e2} \cos \alpha - mg \cos \alpha - F_k \sin \alpha. \quad [5]$$

Підставимо у вирази [4], [5] вирази [1], [2], [3] та прирівняємо їх.

$$k \frac{q^2}{4l^2 \cdot \text{tg}^2 \alpha} \sin \alpha + qE \cos \alpha + mg \cos \alpha = qE_2 \cos \alpha - mg \cos \alpha - k \frac{q^2}{4l^2 \cdot \text{tg}^2 \alpha} \sin \alpha$$

Виразимо напруженість електричного поля E_2 :

$$E_2 = \frac{kq}{2l^2 \cdot \text{tg} \alpha} + E + \frac{2mg}{q}.$$

Завдання 4 (11 клас)

Винахідник запропонував новий спосіб запуску ракет. Замість того, щоб запускати їх вгору, винахідник рекомендував відпускати ракету вниз по жолобу з рейками, який мав форму півкола великого радіуса R та рейки розміщувалися у вертикальній площині. У деякий момент руху по рейках рекомендувалося включити двигун. Винахідник стверджував, що під час такого способу запуску висота підйому ракети буде більшою, ніж під час звичайного запуску (вертикально вгору з таким же двигуном). У якому місці жолоба необхідно включити двигун, щоб висота підйому ракети була максимальною? Звідки береться додаткова енергія для збільшення висоти підйому ракети?

Розв'язок

В умові задачі відсутні відомості про час роботи двигуна. Нехай він працює короткий проміжок часу.

Очевидно, що де б не вмикали двигун, він збільшить швидкість ракети на одну й ту ж величину Δv , яка не залежить від початкової швидкості ракети v_0 . Щоб у цьому переконатися, достатньо перейти в систему відліку, у якій $v_0 = 0$. Будемо також вважати, що маса відпрацьованого палива достатньо мала, тобто маса ракети за час роботи двигуна практично не змінюється.

Різниця кінетичних енергій ракети до та після роботи двигуна дорівнює:

$$\Delta E_k = \frac{m(v_0 + \Delta v)^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2}(v_0^2 + 2v_0\Delta v + (\Delta v)^2 - v_0^2) = \frac{m}{2}(2v_0\Delta v + (\Delta v)^2).$$

Кінетична енергія буде тим більшою, чим більша v_0 . А v_0 набуває максимального значення в нижній точці напівкола.

Додаткова кінетична енергія ракети виникає за рахунок потенціальної енергії частини палива. Під час звичайного старту частина палива викидається на рівні землі, а у випадку ситуації, описаної в умові задачі, – нижче цього рівня.