

Завдання

**II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2021-2022 н.р.**

6 клас

1. Порівняйте дроби $\frac{20212019}{20212021}$ і $\frac{20212020}{20212022}$.

2. На дошці 4×4 розташуйте 8 лицарів і 8 брехунів так, щоб кожен з них міг сказати: «Поруч зі мною стоїть рівно один лицар». Лицарі завжди говорять правду, брехуни завжди брешуть. Люди стоять поруч, якщо в заповнених ними клітинках є спільна сторона. Виконайте рисунок.

3. На рисунку 1 зображено 4 квадрата. Довжина відрізка $AB=11$ см, довжина відрізка $FE=13$ см, довжина відрізка $CD=5$ см. З'ясуйте, чому дорівнює довжина відрізка GH ? Відповідь обґрунтуйте.

4. Розріжте квадрат зі стороною 13 см на 5 прямокутників так, щоб серед 10 натуральних чисел, що зображують довжини сторін прямокутників у сантиметрах, не було однакових.

5. Рахунок за сніданок у кафе в компанії друзів склав 175 гривень. З'ясувалося, що двоє з них забули гроші, тому кожному з компанії довелося заплатити за друзів на 10 гривень більше, ніж планувалося спочатку. З'ясуйте, скільки друзів снідало. Відповідь обґрунтуйте.

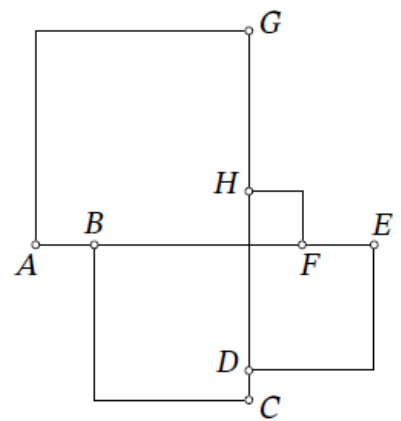


Рис. 1

На виконання роботи відводиться 3 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів

Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Завдання

**II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2021-2022 н.р.**

7 клас

1. Андрій задумав число та повідомив його Олегу та Марії. Олег помножив це число на 10 та додав 5. Марія помножила число Андрія на 8 та відняла 4. Якщо від того числа, що порахував Олег, відняти те число, що порахувала Марія, то вийде 2021. Яке число задумав Андрій?

2. Учитель математики на запитання школярів про вік своєї родини: він, дружина та троє дітей, розповів таку історію. У день, коли народилася перша дитина, сумарний вік усіх був 45. Рік тому, коли народилася третя дитина, він дорівнював 70. А сьогодні сумарний вік дітей – 14 років. З'ясуйте, скільки років дітям учителя математика зараз? Відповідь обґрунтуйте.

3. На стороні BC рівнобедреного трикутника ABC з основою AC вибрали точки N та M , де N між точками B та M так, що $NM=AM$, $\angle MAC=\angle BAN$. Знайдіть $\angle CAN$.

4. На березі озера круглої форми ростуть, чергуючись одна з одною, яблуні та груші. Батько та син вирушили вздовж озера від однієї з груш у протилежних напрямках і зустрілися біля іншої груші. Дорогою батько нарахував удвічі більше яблунь, ніж син. Продовжуючи рухатися в тих же напрямках, вони знову зустрілися біля груші. І знову батько нарахував удвічі більше яблунь, ніж син. Аналогічна ситуація повторилася в третій раз. Доведіть, що третя їхня зустріч відбулася біля тієї груші, від якої вони розпочинали свій рух першого разу.

5. У місті лицарів і брехунів 366 мешканців, причому всі вони народилися в різні дні року. Після перепису населення надрукували звіт, у якому було вказано, що на запитання «Чи народилися ви в січні?» ствердно відповіли 77 людей, а на запитання «Чи народилися ви 30 числа?» ствердно відповіли 60 людей. З'ясуйте, яка інформація міститься в звіті: хибна чи правдива? Відповідь обґрунтуйте.

На виконання роботи відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів

Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Завдання

**II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2021-2022 н.р.**

8 клас

1. Розв'яжіть рівняння $||x-2021|-2023|+x=0$.

2. З'ясуйте, що швидше: проїхати весь шлях автомобілем чи 75% шляху подолати літаком, швидкість якого в 10 разів більша за швидкість автомобіля, а решту 25% шляху – мотоциклом, швидкість якого в 4 рази менша за швидкість автомобіля? Відповідь обґрунтуйте.

3. На березі озера круглої форми ростуть, чергуючись одна з одною, яблуні та груші. Батько та син вирушили вздовж озера від однієї з груш у протилежних напрямках і зустрілися біля іншої груші. Дорогою батько нарахував удвічі більше яблунь, ніж син, та втричі більше яблук на них. Продовжуючи рухатися в тих же напрямках, вони знову зустрілися біля груші. І знову батько нарахував удвічі більше яблунь, ніж син, і втричі більше яблук на них. Так само при третій їхній зустрічі під грушею батько також нарахував удвічі більше яблунь, ніж син. З'ясуйте, хто з них на третьому етапі нарахував більше яблук і в скільки разів? Відповідь обґрунтуйте.

4. На сторонах AB та AD квадрату $ABCD$ вибрані точки N та P відповідно таким чином, що $NC=NP$. Точка Q обрана на відрізку AN так, що $\angle QPN = \angle NCB$. Доведіть, що $2\angle BCQ = \angle AQP$.

5. Квадрат 8×8 розрізали на квадрати 2×2 і прямокутники 1×4 , при цьому загальна довжина розрізів виявилась рівною 54. З'ясуйте, скільки фігурок кожного виду отримали? Відповідь обґрунтуйте.

6. Знайдіть найменше непарне натуральне число n , для якого квадрат можна розрізати на n прямокутників так, щоб серед $2n$ чисел, що зображують довжини сторін прямокутників, не було рівних. Відповідь обґрунтуйте.

На виконання роботи відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів

Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Завдання

**II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2021-2022 н.р.**

9 клас

1. Обчисліть значення виразу: $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2021}+\sqrt{2022}}$.

2. На березі озера круглої форми ростуть, чергуючись одна з одною, яблуні та груші. Батько та син вирушили вздовж озера від однієї з груш у протилежних напрямках і зустрілися біля іншої груші. Дорогою батько нарахував удвічі більше яблунь, ніж син, і втричі більше яблук на них. Продовжуючи рухатися в тих же напрямках, вони знову зустрілися біля груші. І знову батько нарахував удвічі більше яблунь, ніж син, і втричі більше яблук на них. Так само при третій їхній зустрічі під грушею батько також нарахував удвічі більше яблунь, ніж син. З'ясуйте, хто з них на третьому етапі нарахував більше яблук і в скільки разів? Відповідь обґрунтуйте.

3. Для додатних чисел a, b, c доведіть, що справджується нерівність $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq \frac{4a}{a+b}$.

4. Коло, вписане в прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою AB , дотикається до його сторін BC, CA, AB у точках A_1, B_1, C_1 відповідно. Нехай B_1H – висота трикутника $A_1B_1C_1$. Доведіть, що точка H лежить на бісектрисі кута CAB .

5. У палаці 9 однакових квадратних кімнат, які утворюють квадрат 3×3 . У ці кімнати по одній людині поселилося 9 осіб – брехуни та лицарі (брехуни завжди брешуть, лицарі завжди говорять правду). Кожен із цих 9 осіб сказав: «Принаймні в одній із сусідніх з моєю кімнат живе брехун». Кімнати вважаються сусідніми, якщо у них спільна стіна. Знайдіть найбільшу кількість лицарів серед цих 9 осіб? Відповідь обґрунтуйте.

6. Знайдіть найменше натуральне число n , для якого квадрат можна розрізати на n прямокутників так, щоб серед $2n$ чисел, що зображують довжини сторін прямокутників, не було рівних. Відповідь обґрунтуйте.

На виконання роботи відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів

Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Завдання

**II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2021-2022 н.р.**

10 клас

1. На дошці записано три квадратних рівняння:

$$2020x^2 + bx + 2021 = 0, 2019x^2 + bx + 2020 = 0, x^2 + bx + 2019 = 0.$$

Знайдіть добуток коренів всіх рівнянь, записаних на дошці, якщо відомо, що кожне з них має два дійсних кореня.

2. Для додатних чисел a, b , що задовольняють умову $a + b < 2$, доведіть нерівність:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab}.$$

3. У прямокутному трикутнику ABC на гіпотенузу AC проведена висота BH . На стороні BC відмічена точка D , на відрізку BH – точка E , а на відрізку CH – точка F так, що $\angle BAD = \angle CAE$ і $\angle AFE = \angle CFD$. Доведіть, що $\angle AEF = 90^\circ$.

4. На березі озера круглої форми ростуть, чергуючись одна з одною, яблуні та груші. Батько та син вирушили вздовж озера від однієї з груш у протилежних напрямках і зустрілися біля іншої груші. Дорогою батько нарахував у n разів більше яблунь, ніж син, і в $n + 1$ разів більше яблук на них. Продовжуючи рухатися в тих же напрямках, вони знову зустрілися біля груші. І знову батько нарахував у n разів більше яблунь, ніж син, і в $n + 1$ разів більше яблук на них. Аналогічна ситуація повторилася n разів. З'ясуйте, для яких n могло статися так, що на наступному етапі батько знову нарахував у n разів більше яблунь, ніж син, але яблук на них вони нарахували порівну? Відповідь обґрунтуйте.

5. У палаці 16 однакових квадратних кімнат, які утворюють квадрат 4×4 . У ці кімнати по одній людині поселилося 16 осіб – брехуни та лицарі (брехуни завжди брешуть, лицарі завжди говорять правду). Кожен із цих 16 осіб сказав: «Принаймні в одній із сусідніх з моєю кімнат живе брехун». Кімнати вважаються сусідніми, якщо у них спільна стіна. Знайдіть найбільшу кількість лицарів серед цих 16 осіб? Відповідь обґрунтуйте.

6. Доведіть, що існує безліч натуральних чисел n , для яких квадрат можна розрізати на n прямокутників так, що серед $2n$ чисел, що зображують довжини сторін прямокутників, не було рівних. Відповідь обґрунтуйте.

На виконання роботи відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів

Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Завдання

II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2021-2022 н.р.

11 клас

1. Побудуйте графік функції $y = \frac{2020}{\cos^2(\operatorname{arctg}(x - \pi))} - 2021$.
2. Розв'яжіть рівняння $[2020x + 2021] = 1$, де $[x]$ – ціла частина числа.
3. На березі озера круглої форми ростуть, чергуючись одна з одною, яблуні та груші. Батько та син вирушили вздовж озера від однієї з груш у протилежних напрямках і зустрілися біля іншої груші. Дорогою батько нарахував у n разів більше яблунь, ніж син, і в $n + 1$ разів більше яблук на них. Продовжуючи рухатися в тих же напрямках, вони знову зустрілися біля груші. І знову батько нарахував у n разів більше яблунь, ніж син, і в $n + 1$ разів більше яблук на них. Аналогічна ситуація повторилася n разів. З'ясуйте, для яких n могло статися так, що на наступному етапі батько знову нарахував в n разів більше яблунь, ніж син, але яблук на них вони нарахували порівну? Відповідь обґрунтуйте.
4. У палаці 25 однакових квадратних кімнат, які утворюють квадрат 5×5 . У ці кімнати по одній людині поселилося 25 осіб – брехуни та лицарі (брехуни завжди брешуть, лицарі завжди говорять правду). Кожен із цих 25 осіб сказав: «Принаймні в одній із сусідніх з моєю кімнат живе брехун». Кімнати вважаються сусідніми, якщо у них є спільна стіна. Знайдіть найбільшу кількість лицарів серед цих 25 осіб? Відповідь обґрунтуйте.
5. Чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло. Перпендикуляр до сторони BC , проведений через її середину – точку M , перетинає сторону AB у точці K . Коло з діаметром KC перетинає відрізок CD у точці P ($P \neq C$). Доведіть, що прямі MP і AD перпендикулярні.
6. Доведіть, що існує безліч натуральних чисел n , для яких квадрат можна розрізати на n прямокутників так, що серед $2n$ чисел, що зображують довжини сторін прямокутників, не було рівних. Відповідь обґрунтуйте.

На виконання роботи відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів
Використання цифрових пристроїв не дозволяється