Відповіді II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2021-2022 н.р.

6 клас

1. Використаємо метод доповнення до одиниці:

$$1-\frac{20212019}{20212021}=\frac{2}{20212021},\ 1-\frac{20212020}{20212022}=\frac{2}{20212022},$$

$\frac{2}{20212021}>\frac{2}{20212022}$, отже $\frac{20212019}{20212021}<\frac{20212020}{20212022}$.

Відповідь: $\frac{20212019}{20212021}<\frac{20212020}{20212022}$.

2.

Б	Л	Л	Б
Л	Б	Б	Л
Л	Б	Б	Л
Б	Л	Л	Б

3. Сторона самого більшого квадрата (з вершиною A) більше сторони другого за величиною квадрата (з вершиною C) на довжину відрізка AB=11 см (рис 1).

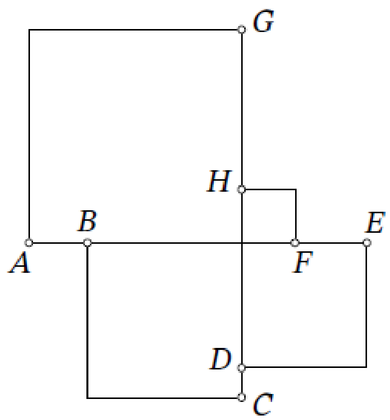

Рисунок 1

Сторона другого за величиною квадрата більше сторони третього за величиною квадрата (з вершиною E) на довжину відрізка CD=5 см. А його сторона більше сторони самого маленького квадрата на довжину відрізка EF=13 см. Отже, сторона більшого квадрата більше сторони самого маленького квадрата на довжину відрізка GH=11 + 5 + 13 = 29 см.

Відповідь: 29 см.

4.

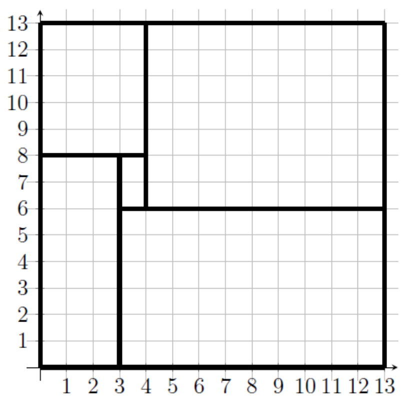

Рисунок 2

5. Число175 складається з множників: кількість людей, які снідали та вартість 1 сніданку. Розкладемо 175 на прості множники: 175=5·5·7.

Припустимо, що кількість друзів, які снідали може бути – 5, 7, 25, 35**.**

Останні два припущення 25друзів і 35 друзів недійсні, оскільки доплата складає 230 гривен і 330 гривен відповідно, що суперечить умові задачі.

Якщо 5 друзів снідає, то вартість сніданку складає 35 гривен.

Якщо 7 друзів снідає, то вартість сніданку складає 25 гривен.

Оскільки кількість платників за сніданок на 2 менше, ніж тих, хто снідає, то кількість людей на сніданку 7.

Відповідь: 7.

7 клас

1. Нехай Андрій задумав число x. Тоді за умовою $10x + 5 - (8x - 4) = 2021$. Звідси $x = 1006$.

Відповідь: $x = 1006$

2. Нехай різниця віку першої та другої дитини – x , другої та третьої – y .

Тоді на час між народженням першої та третьої (тобто рік тому) вік родини збільшився на $3(x + y) + y$: вік трьох осіб – батьків та старшої дитини – на $x+y$, середньої дитини – на y .

Тоді $3x+4y = 70- 45= 25$.

Крім того сумарний вік дітей на зараз складає:

$$(x+y +1) +(y +1) +1=14 \Rightarrow x + 2y =11.$$

$x= 3, y = 4$.

Тому зараз дітям 1, 5, 8 років.

Відповідь: 1, 5, 8 років.

3. Позначимо $\angle MAC = \angle BAN =\alpha$ (рис. 3),

$\angle NAM = \angle ANM =\beta$.

Тоді $\angle A =2\alpha+\beta$, а з ΔACN $\angle C =180-\alpha-2\beta$.

Оскільки трикутник ABC рівнобедрений,

то $3\alpha+3\beta=180° \Rightarrow \angle CAN=\alpha+\beta=60°$.

Відповідь: 60°.

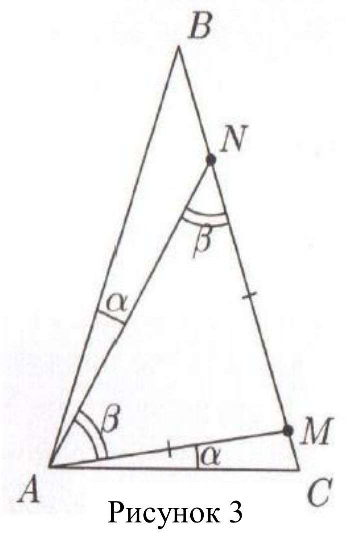

Рисунок 3

4. Із умови задачі випливає, що син кожного разу нараховував третину від загального числа всіх яблунь. Тому після третього етапу їхнього руху ним були пораховані по одному разу всі яблуні. А оскільки яблуні та груші чергуються й остання зустріч також відбулася під грушею, то це є та сама груша, від якої вони починали свій рух.

5. Якщо людина народилася 30 січня, то вона дасть парну кількість ствердних відповідей. Розглянемо 30 людей, які народилися в січні, але не 30-го числа. Кожен з них дасть одну ствердну відповідь (лицар про січень, а брехуни про число). Тому буде парна кількість ствердних відповідей.

Тепер розглянемо 10 людей, які народилися 30 числа, але не в січні .

Кожен з них дасть одну ствердну відповідь (лицарі про число, а брехуни про січень). Тому знову буде парна кількість ствердних відповідей.

А всі інші дадуть парну кількість ствердних відповідей (лицарі обидва рази дадуть негативну відповідь, а брехуну обидва рази ствердну відповідь).

Таким чином, повинна бути парна кількість ствердних відповідей.

Але у звіті вказано, що ствердних відповідей 60+77=137.

Це означає, що у звіті невірні дані.

Відповідь: у звіті міститься хибна інформація.

8 клас

1. $||x-2021|-2023|+x=0$

$|x-2021|-2023=-x$ або $|x-2021|-2023=x$

а) $|x-2021|=2023-x$

x–2021=2023–x або x–2021= x – 2023 ;
2x=4044 або 0x=–2
x=2022 коренів не має.

б) $|x-2021|=2023+x$

x–2021=2023+x або x–2021= –x – 2023 ;
0x=4044 або 2x= –2
коренів немає x= – 1

Перевірка показує, що коренем рівняння є число x= – 1

Відповідь: x= – 1.

2. Нехай швидкість мотоцикла становить x (км/год), тоді швидкість автомобіля 4x (км/год), а швидкість літака – 40x (км/год).

Нехай S – 25% усього шляху, тоді 75% усього шляху становить $3S$, а весь шлях – $4S$. Щоб проїхати весь шлях автомобілем знадобиться час $T_1=\frac{4S}{4x}=\frac{S}{x}$, а щоб подолати 75% шляху літаком і решту 25% шляху мотоциклом, знадобиться час $T_2=\frac{3S}{40x}+\frac{S}{x}=\frac{3S}{40x}+T_1$, звідки $T_2>T_1$.

Відповідь: швидше проїхати весь шлях автомобілем.

3. Із умови задачі випливає, що син кожного разу нараховував третину від загального числа всіх яблунь. Тому після третього етапу їхнього руху ним були пораховані по одному разу всі яблуні. А оскільки яблуні та груші чергуються й остання зустріч також відбулася під грушею, то це є та сама груша, від якої вони починали свій рух. Зрозуміло, що при цьому сином також по одному разу були пораховані всі яблука на яблунях навколо озера. А оскільки на перших двох етапах він нараховував лише по четвертій частині від них, то на третьому етапі нарахував половину всіх яблук, стільки ж, як і батько.

Відповідь: порівну.

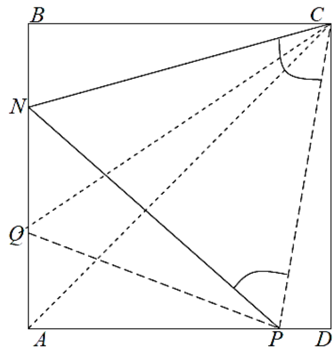

Рисунок 4

4. Оскільки $\angle BAC=\angle DAC=45°$, то AC – бісектриса $\angle PAQ$ (рис. 4). Якщо $\angle QPN=\angle NCB=\alpha$, $\angle PCN=\angle NPC=\beta$, звідси $\angle QPC=\alpha+\beta$.

Окрім того, $\angle PCD=90°-(\alpha+\beta)$, отже $\angle CPD=\alpha+\beta$, тобто PC – бісектриса $\angle QPD$.

Ці дві бісектриси перетинаються в точці C , але тоді для ΔPAQ і бісектриса $\angle PQB$ має проходити через C, тобто $\angle QPC=\angle CQB=\gamma$, звідси $\angle AQP=180°-2\gamma$ та $\angle BCQ=90°-\gamma$, що й треба було довести.

5. У квадраті 8×8 – 64 клітинки, а в кожній отриманій фігурці – по 4 клітинки. Тому всього отримали 16 фігурок.

Знайдемо суму периметрів всіх отриманих фігурок. Оскільки границя кожного розрізу входить у периметр двох фігурок, то додамо до периметра квадрата подвоєну довжину розрізів: 32+2·54=140.

Периметр квадрата 2×2 рівний 8, а периметр прямокутника 1×4 рівний 10, тобто на 2 більше. Якщо б всі 16 фігурок були квадратами, то їх периметри в сумі дорівнювали б 16·8=128. Це на 140-128=12, менше, ніж насправді. Для збільшення загального периметра на 12 потрібно 6 квадратів замінити на прямокутники. Тому прямокутників було 6, а квадратів – 10.

Або $8x+10(16-x)=140$ звідки $x=10$.

Або $\begin{cases} 4x+4y=64, \\ 8x+10y=140. \end{cases}$

Відповідь: прямокутників 6, квадратів 10.

6. Зрозуміло, що $n > 1$. Покажемо, що на 3 прямокутники, які задовольняють умові задачі, розрізати квадрат неможливо. Більше того, будемо показувати, що на три прямокутники згідно з умовою задачі неможливо розрізати й довільний прямокутник.

Спочатку зауважимо, що якщо прямокутник розрізано на два прямокутника, то серед довжин цих двох прямокутників є однакові. Припустимо, що прямокутник *ABCD* розрізано на три прямокутники *P; Q і R*. Тоді знайдеться прямокутник, що містить принаймі 2 з вершин *ABCD*; нехай це прямокутник *P* і нехай він містить вершину *A*.

Тоді він не може містити вершину *C* і ми можемо без зменшення загальності вважати, що він містить вершину *B*. Тоді сторони прямокутника *P* є паралельними до сторін прямокутника *ABCD*, а отже прямокутники *Q* та *R* є частинами прямокутника, який залишився після відрізання прямокутника *P* від прямокутника *ABCD*. Але тоді прямокутники *Q* та *R* мають однакову сторону, що неможливо.

Відповідь: $n = 5$.

9 клас.

1. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2021}+\sqrt{2022}}$.

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2021}+\sqrt{2022}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\ldots+\frac{\sqrt{2022}-\sqrt{2021}}{2022-2021}=\sqrt{2022-1}.$$

2 Із умови задачі випливає, що син кожного разу нараховував третину від загального числа всіх яблунь. Тому після третього етапу їхнього руху ним були пораховані по одному разу всі яблуні. А оскільки яблуні та груші чергуються й остання зустріч також відбулася під грушею, то це є та сама груша, від якої вони починали свій рух. Зрозуміло, що при цьому сином також по одному разу були пораховані всі яблука на яблунях навколо озера. А оскільки на перших двох етапах він нараховував лише по четвертій частині від них, то на третьому етапі нарахував половину всіх яблук, стільки ж, як і батько.

Відповідь: порівну.

3. $\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}\ge\dfrac{4a}{a+b}$.

Домножимо обидві частини нерівності на $bc(a+b)$:

$$ab(a+b)+c^2(a+b)\ge 4abc \;\Leftrightarrow\; c^2(a+b)-4abc+ab(a+b)\ge 0.$$

Розглянемо її як квадратну відносно c . Оскільки дискримінант:

$$D = 16a^2b^2 - 4ab(a+b)^2 = -4ab((a+b)^2 - 4ab) = -4ab(a-b)^2 \le 0.$$
то нерівність справджується, бо тоді ця функція – невід’ємна.

4. Покажемо, що $\angle A_1C_1B_1 = 45°$. Розглянемо рівнобедрені трикутники AB_1C_1 і BA_1C_1 (рис. 5).

Маємо $\angle AC_1B_1 = 90° - \frac{1}{2} \angle BAC$ і $\angle BC_1A_1 = 90° - \frac{1}{2} \angle ABC$, тоді

$\angle A_1C_1B_1 = 180° - \angle AC_1B_1 - \angle BC_1A_1 = \frac{1}{2} (\angle BAC + \angle ABC) = 45°$

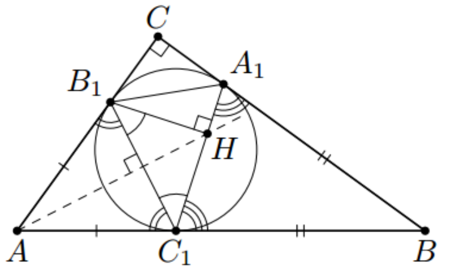

Рисунок 5

5. Помітимо, що в кожного лицаря хоча б один із сусідів повинен бути брехуном. Покажемо, що брехунів повинно бути не менше 3 (так ми покажемо, що лицарів не більше 6).

Нехай брехунів не більше 2, тоді знайдеться «вертикальний ряд» кімнат, у яких мешкають лише лицарі. Але тоді у кожного з цих лицарів повинен бути сусід брехун (і ці сусіди різні). Тому брехунів не менше 3. Покажемо, як можуть поселитися 6 лицарів і 3 брехуна.

Л	Б	Л
Л	Л	Б
Б	Л	Л

Відповідь: 6 лицарів.

6. Зрозуміло, що $n > 1$.

Покажемо, що на 3 прямокутники, які задовольняють умові задачі, розрізати квадрат неможливо. Більше того, будемо показувати, що на три прямокутники згідно з умовою задачі неможливо розрізати й довільний прямокутник.

Спочатку зауважимо, що якщо прямокутник розрізано на два прямокутника, то серед довжин цих двох прямокутників є однакові. Припустимо, що прямокутник $ABCD$ розрізано на три прямокутники P; Q і R. Тоді знайдеться прямокутник, що містить принаймі 2 з вершин $ABCD$; нехай це прямокутник P і нехай він містить вершину A.

Тоді він не може містити вершину C і ми можемо без зменшення загальності вважати, що він містить вершину B. Тоді сторони прямокутника P є паралельними до сторін прямокутника $ABCD$, а отже прямокутники Q та R є частинами прямокутника, який залишився після відрізання прямокутника P від прямокутника $ABCD$. Але тоді прямокутники Q та R мають однакову сторону, що неможливо.

Покажемо, що $n \ne 4$.

Якщо квадрат $ABCD$ розрізано на чотири прямокутника P; Q; R; S згідно з умовами задачі, то кожен з них містить по одній вершині квадрата $ABCD$, оскільки інакше деякий прямокутник був би розрізаним на три прямокутники з різними сторонами. Тому сторони кожного з прямокутників P; Q; R; S паралельні сторонам квадрата *ABCD,* а отже містять по три вершини на сторонах квадрата *ABCD* і одній вершині всередині нього. Будемо вважати, що вершинами прямокутника *P* є точки $A; P_1; K; P_2$ $(P_1 \in AB)$; вершинами *Q* є точки $B; Q_1; L; Q_2$ $(Q_1 \in BC)$; вершинами *R* є точки $C; R_1; M; R_2$ $(R_1 \in CD)$ і вершинами *S* є точки $D; S_1; N; S2$ $(S_1 \in AD)$.

Тоді $P_1 = Q_2$, $P_2 = S_1$, $Q_1 = R_2$ *і* $S_2 = R_1$,бо інакше відповідні відрізки не належать жодному з прямокутників *P; Q; R; S.*

Якщо *K* співпадає *з M,* то всі чотири точки *K; L; M; N* співпадають і серед довжин сторін прямокутників *P; Q; R; S* є однакові.

Якщо відрізок *KM* паралельний до сторони *AD,* то прямокутники *Q і R* мають однакову сторону; а якщо стороні *AB,* то прямокутники *P і Q* мають однакову сторону.

Тому відрізок *KM* не паралельний до жодної зі сторін квадрата *ABCD.* Проведемо через точку *K* прямі, що паралельні сторонам квадрата *ABCD.*

Вони розбивають квадрат *ABCD* на чотири прямокутники $P; W_1; W_2; W_3$, і вважаємо, що вершини *B; C і D* належать прямокутникам $W_1; W_2$ *і* W_3 відповідно.

Отже, точка *M* лежить всередині одного з прямокутників $W_1; W_2$ або W_3.

Якщо *M* лежить всередині W_1 або W_3, то середина відрізка *KM* не належить жодному з прямокутників *P; Q; R* або *S*, що неможливо.

Тому *M* знаходиться всередині W_2. Але тоді прямокутники *Q* і *S* перетинаються, що неможливо. Прийшли до суперечності.

Відповідь: $n = 5$.

10 клас

1. $2020x^2+bx+2021=0$, $2019x^2+bx+2020=0$, $x^2+bx+2019=0$.

За теоремою, оберненою т. Вієта, добуток коренів першого рівняння $\frac{2021}{2020}$, добуток коренів другого рівняння $\frac{2020}{2019}$, добуток коренів третього рівняння 2019.

Отже, добуток коренів всіх рівнянь, записаних на дошці, дорівнює

$$\frac{2021}{2020}\cdot\frac{2020}{2019}\cdot 2019=2021$$

Відповідь: 2021.

2. Для додатних чисел a, b, що задовольняють умову $a+b<2$, доведіть нерівність:

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\le\frac{2}{1+ab}.$$

Зробимо такі перетворення:

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}=\frac{2+a^2+b^2}{(1+a^2)(1+b^2)}=\frac{(1+a^2)(1+b^2)+1-a^2b^2}{(1+a^2)(1+b^2)}=1+\frac{1-a^2b^2}{(1+a^2)(1+b^2)}\le 1+\frac{1-a^2b^2}{(1+ab)^2}=1+\frac{1-ab}{1+ab}=\frac{2}{1+ab}$$

оскільки з нерівності між середніми легко отримати, що $(1+a^2)(1+b^2)\ge(1+ab)^2$.

3. Побудуємо точку E', симетричну точці E відносно сторони AC (рис. 6). Помітимо, що точка F лежить на прямій DE', бо $\angle DFC = \angle EFA = \angle E'FA$ у силу симетрії.

Із прямокутних трикутників ABC і BCH отримаємо

$\angle E'BC = 90° - \angle ACB = \angle BAC$.

Помітимо, що $\angle BAD = =\angle CAE =\angle CAE'$.

Отже, $\angle DAE' = \angle CAE' + \angle DAC = \angle BAD + \angle DAC = \angle BAC = \angle E'BC$.

Чотирикутник $ABDE'$ – вписаний.

Оскільки $\angle ABD = 90°$, то $\angle AE'D = 90°$. Тоді в силу симетрії $\angle AEF = 90°$, що й необхідно довести.

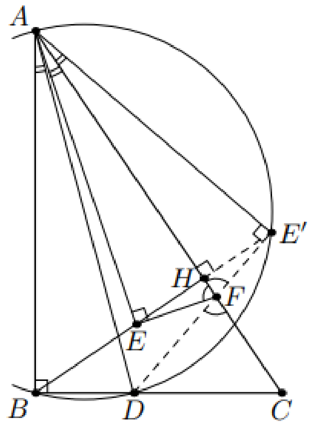

Рисунок 6

4. Син кожного разу нараховував $\frac{1}{n+1}$ від загального числа всіх яблунь. Після (n +1) етапу ним були пораховані по одному разу всі яблуні. Отже, остання зустріч відбулася під грушею, від якої вони починали свій рух. При цьому сином по одному разу були пораховані й всі яблука на яблунях навколо озера. На перших n етапах він нараховував по $\frac{1}{n+2}$ частині від них, а на останньому – половину. Із рівності $\frac{n}{n+2}+\frac{1}{2}=1$ знаходимо n=2. Така ситуація реальна, якщо, наприклад, дерева росли на однакових відстанях між сусідніми з них, батько рухався вдвічі швидше за сина, і на перших двадцяти яблунях син нараховував по 10 яблук, а на решти десятьох – по 20.

Відповідь: для n=2.

5. Помітимо, що в кожного лицаря хоча б один із сусідів повинен бути брехуном. Покажемо, що брехунів повинно бути не менше 4 (так ми покажемо, що лицарів не більше 12).

Нехай брехунів не більше 3, тоді знайдеться «вертикальний ряд» кімнат, у яких мешкають тільки лицарі. Але тоді у кожного з цих лицарів повинен бути сусід брехун (і ці сусіди різні). Тоді брехунів не менше 4.

Л	Б	Л	Л
Л	Л	Л	Б
Б	Л	Л	Л
Л	Л	Б	Л

Відповідь: 12 лицарів

6. Відмітимо, що довільний прямокутник із раціональними довжинами сторін $0 < \frac{m}{n}; \frac{p}{q} \le 1$, p; q; m; $n \in N$, можна розбити на скінченну кількість квадратів з раціональною стороною $\frac{1}{nq}$.

Покажемо, що якщо задано довільний набір додатніх чисел $a_{1}, \ldots, a_k$, $k \in N$ і квадрат з раціональною довжиною сторони a, то його можна розрізати на 5 прямокутників, так, щоб усі 10 довжин сторін цих прямокутників були раціональні, різні й не дорівнювали жодному з чисел $a_1, \ldots, a_k$, $k \in N$.

Почнемо з конструкції щодо розрізання квадрата зі стороною 13 см на 5 прямокутників так, щоб серед 10 натуральних чисел, що зображують довжини сторін прямокутників у сантиметрах, не було однакових. У цьому розрізанні сторони усіх прямокутників попарно різні і раціональні.

Виберемо раціональне $\varepsilon > 0$ так, щоб усі сторони прямокутників були більші за ε і щоб різниця довжин довільних двох сторін прямокутників була більшою за 2ε. Існує нескінченна кількість способів вибрати таке ε.

Модифікуємо розрізання прямокутника таким чином: сторони «маленького» прямокутника всередині збільшимо на 2ε (по ε вліво, вправо, уверх і вниз); тоді в кожного з інших чотирьох прямокутників дві сторони збільшаться, а дві зменшаться на ε.

У силу вибору ε усі сторони нових п'ятьох прямокутників залишаться різними.

Окрім того, за рахунок вибору ε ми можемо досягти того, щоб довжини цих сторін не дорівнювали жодному з чисел $a_1,\dots,a_k$, , $k \in N$.

Тепер покажемо, як можна отримати нескінченний набір чисел *n,* що задовольняютьумові задачі.

Можемо вважати, що початковий квадрат має довжину 1.

Розріжемо його на два прямокутники $1 \times \frac{1}{3}$ і $1 \times \frac{2}{3}$.

Перший з цих прямокутників розріжемо на квадрати з раціональними довжинами сторін, а потім кожен з цих квадратів по черзі розіб'ємо на 5 прямокутників так, щоб довжини сторін цих прямокутників не дорівнювали 1, $\frac{2}{3}$, а також довжинам сторін прямокутників, які отримано при розрізанні попередніх квадратів.

Отримаємо розрізання початкового квадрата на скінченну кількість n_1 прямокутників із попарно різними довжинами сторін.

Візьмемо один з n_1 прямокутників, і аналогічним чином розріжемо його на прямокутники з різними довжинами сторін, причому так, щоб ці довжини не співпадали з довжинами сторін усіх n_1 прямокутників.

Отримаємо розрізання початкового квадрата на скінченну кількість $n_2>n_1$ прямокутників з попарно різними довжинами сторін. Продовжуючи аналогічним чином, отримаємо нескінченну кількість чисел *n*, що задовольняють умові задачі.

11 клас

1. Побудуйте графік функції $y = \dfrac{2020}{cos^2(arctg(x-\pi))} - 2021.$

$$y = \frac{1}{cos^2(arctgx)} = tg^2(arctgx) + 1 = x^2 + 1.$$

Графік функції $y = \dfrac{2020}{cos^2(arctg(x-\pi))} - 2021$ – парабола з вітками вгору і вершиною в точці (π;-1).

2. [2020*x* + 2021]=1, де [*x*] – ціла частина числа.

Оскільки [2020*x* + 2021]=1, то $1 \le 2020x + 2021 < 2$, звідки $-2020 \le 2020x < -2019$, $-1 \le x < -\frac{2019}{2020}$.

Відповідь: $x \in \left[-1; -\dfrac{2019}{2020}\right)$.

3. Син кожного разу нараховував $\dfrac{1}{n+1}$ від загального числа всіх яблунь. Після (n +1) етапу ним були пораховані по одному разу всі яблуні. Отже, остання зустріч відбулася під грушею, від якої вони починали свій рух. При цьому сином по одному разу були пораховані й усі яблука на яблунях навколо озера. На перших n етапах він нараховував по $\dfrac{1}{n+2}$ частині від них, а на останньому – половину. Із рівності $\dfrac{n}{n+2}+\dfrac{1}{2}=1$ знаходимо n=2. Така ситуація реальна, якщо, наприклад, дерева росли на однакових відстанях між сусідніми з них, батько рухався вдвічі швидше за сина, і на перших двадцяти яблунях син нараховував по 10 яблук, а на решти десятьох – по 20.

Відповідь: для n=2.

4. Зауважимо, що в кожного лицаря хоча б один з сусідів повинен бути брехуном. Покажемо, что брехунів повинно бути не менше 7 (так ми покажемо, що лицарів більше 18). Спочатку розглянемо розбиття кімнат на 6 груп (2 кімнати, відмічені сірим, не входять ні в одну з груп).

У кожній групі повинен бути хоча б один брехун (інакше в одного з лицарів групи не буде сусідів брехунів). Таким чином, брехунів не менш 6. Доведемо, що їх не може бути рівно 6. Припустимо супротивне. Тоді в кожній з виділених на рис. 7 груп буде рівно по 1 брехунові. А це значить, що в «сірих кімнатах» точно будуть лицарі.

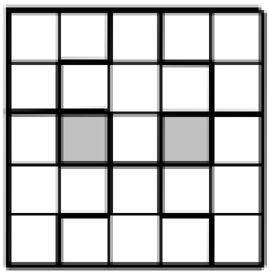

Рисунок 7

Але якщо зробити аналогічне розбиття, але повернене на 90 °, ми отримаємо, що ще в двох кімнатах повинні жити лицарі. Ці 4 кімнати відзначені на рис. 8 сірим. Звідси випливає, що в центральній кімнаті зобов'язаний жити брехун.

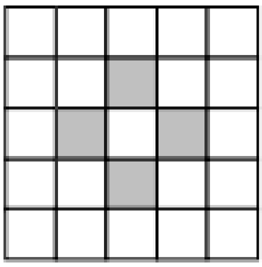

Рисунок 8

Оскільки в кожній з 6 груп розбиття повинен бути рівно 1 брехун, то в кімнатах, зазначених на рис. 9 сірим, повинні жити лицарі.

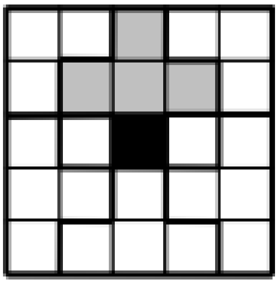

Рисунок 9

Повертаючи картинку на 90 °, ми отримаємо, що лицарі повинні жити в кімнатах, зазначених на рис. 10 сірим.

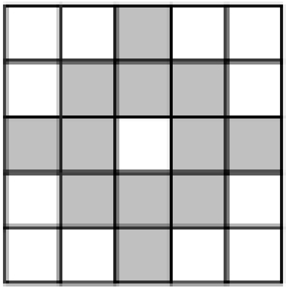

Рисунок 10

Але тоді в кожній групі з 3 «кутових кімнат» має бути не менше 2 брехунів.

І всього брехунів буде не менше 9. Отримали протиріччя. Отже, брехунів не менш 7.

Покажемо, як могли поселитися 18 лицарів і 7 брехунів.

Л	Л	Б	Л	Л
Б	Л	Л	Л	Б
Л	Л	Б	Л	Л
Б	Л	Л	Л	Б
Л	Л	Б	Л	Л

Відповідь: 18 лицарів.

5. Нехай ω – коло, побудоване на KC як на діаметрі, тоді точка M лежить на ω, оскільки $\angle CMK$ – прямий (рис. 11).

Отже, $\angle CPM = \angle CKM = \alpha$ (вони опираються на дугу CM кола ω).

Нехай T – точка перетину прямих AD і MP. Будемо вважати, що точка D лежить на відрізку AT.

Другий випадок розбирається аналогічно.

Тоді $\angle TPD = \alpha$ (кути TPD і CPM – вертикальні). Отже, для того, щоб довести, що прямі AD і MP перпендикулярні, нам необхідно довести, що

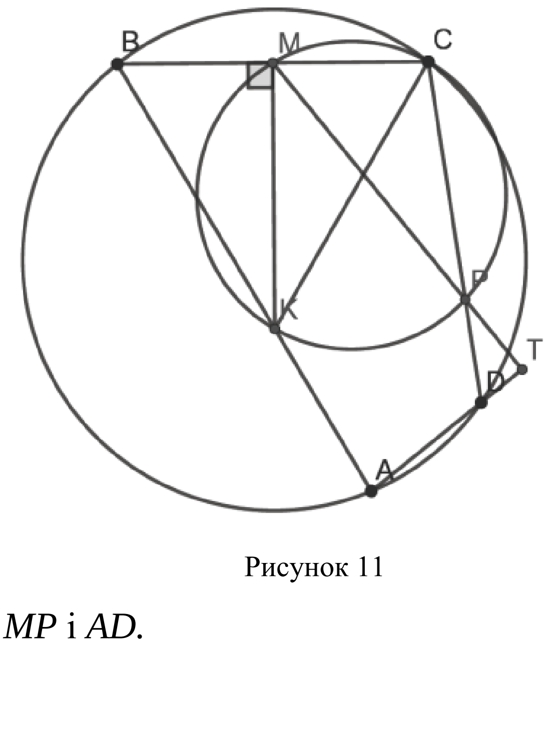

Рисунок 11

$\angle PDT + \alpha = \frac{\pi}{2}$, де T – точка перетину прямих MP і AD.

Але якщо $\angle PDT = \alpha$, то $\angle PDA = \alpha - \beta$, $\Rightarrow$ $\angle ABC = \beta$, оскільки чотирикутник $ABCD$ – вписаний. $BK = CK$, оскільки MK – серединний перпендикуляр до BC.

Отже, $\angle KCM = \angle\ KBM = \beta$.

Із прямокутного трикутника KMC маємо $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$. Твердження доведено.

6. Відмітимо, що довільний прямокутник з раціональними довжинами сторін $0 < \frac{m}{n}; \frac{p}{q} \leq 1$, $p; q; m; n \in N$, можна розбити на скінченну кількість квадратів з раціональною стороною $\frac{1}{nq}$.

Покажемо, що якщо задано довільний набір додатніх чисел $a_1, \ldots, a_k$, $k \in N$ і квадрат з раціональною довжиною сторони а, то його можна розрізати на 5 прямокутників, так, щоб усі 10 довжин сторін цих прямокутників були раціональні, різні і не дорівнювали жодному з чисел $a_1, \ldots, a_k$, $k \in N$.

Почнемо з конструкції щодо розрізання квадрата зі стороною 13 см на 5 прямокутників так, щоб серед 10 натуральних чисел, що зображують довжини сторін прямокутників у сантиметрах, не було однакових.

У цьому розрізанні сторони усіх прямокутників попарно різні і раціональні.

Виберемо раціональне $\varepsilon > 0$ так, щоб усі сторони прямокутників були більші за ε і щоб різниця довжин довільних двох сторін прямокутників була більшою за 2ε. Існує нескінченна кількість способів вибрати таке ε.

Модифікуємо розрізання прямокутника таким чином: сторони «маленького» прямокутника всередині збільшимо на 2ε (по ε вліво, вправо, уверх і вниз); тоді у кожного з інших чотирьох прямокутників дві сторони збільшаться, а дві зменшаться на ε. У силу вибору ε, усі сторони нових п'ятьох прямокутників залишаться різними.

Окрім того, за рахунок вибору ε ми можемо досягти того, щоб довжини цих сторін не дорівнювали жодному з чисел $a_1, \ldots, a$k, , $k \in N$.

Тепер покажемо, як можна отримати нескінченний набір чисел n, що задовольняютьумові задачі.

Можемо вважати, що початковий квадрат має довжину 1. Розріжемо його на два прямокутники $1 \times \frac{1}{3}$ і $1 \times \frac{2}{3}$. Перший з цих прямокутників розріжемо на квадрати з раціональними довжинами сторін, а потім кожен з цих квадратів по черзі розіб'ємо на 5 прямокутників так, щоб довжини сторін цих прямокутників не дорівнювали 1, $\frac{2}{3}$ а також довжинам сторін прямокутників, які отримано при розрізанні попередніх квадратів.

Отримаємо розрізання початкового квадрата на скінченну кількість n_1 прямокутників з попарно різними довжинами сторін.

Візьмемо один з n_1 прямокутників, і аналогічним чином розріжемо його на прямокутники з різними довжинами сторін, причому так, щоб ці довжини не співпадали з довжинами сторін усіх n_1 прямокутників.

Отримаємо розрізання початкового квадрата на скінченну кількість $n_2 > n_1$ прямокутників з попарно різними довжинами сторін. Продовжуючи аналогічним чином, отримаємо нескінченну кількість чисел n, що задовольняють умові задачі.