

Завдання III етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з фізики
Теоретичний тур
11 клас

Завдання 1

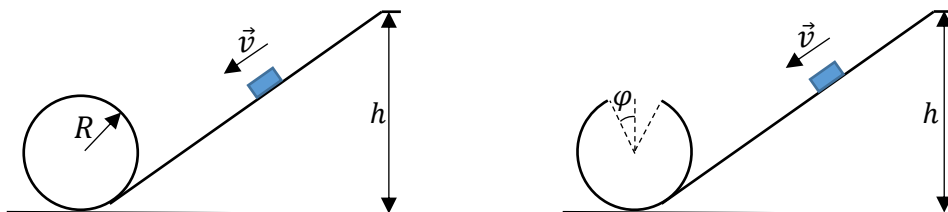
Пружинна гармата, встановлена на закріпленій горизонтальній підлозі, вистрілює металеву кульку масою m на максимальну відстань S . На яку максимальну відстань від початкового розташування гармати можна вистрілити кульку, якщо гармату встановити на візку, який без тертя рухається по підлозі? Маса візка з гарматою M .

Розв'язок

Дивись розв'язок завдання № 4 для 10-го класу.

Завдання 2

У одній з науково-популярних телевізійних програм було показано відомий дослід з «мертвою петлею». Невелике тіло без тертя зісковзує з певної висоти h по похилому жолобу, який переходить в «петлю»: виток гвинтової лінії радіуса R . За певного значення висоти h тіло проходить верхню точку петлі не відриваючись від жолоба. Але петля, що використовувалася в телевізійній програмі, була розбірною. Знімаючи верхню частину жолоба, ведучий ефектно демонстрував, що тіло також проходить «мертву петлю». Та, чи не хитрував він? За яких умов цей «фокус» виконується? Якщо радіуси, проведені в крайні точки симетричного розриву створюють кут φ з вертикаллю, то при якій мінімальній початковій висоті над нижньою точкою петлі треба відпустити тіло, щоб воно вилетіло із жолоба?



Розв'язок

За умовою задачі рух тіла по коловому жолобу, розташованому у вертикальній площині, відбувається за відсутності сили тертя. Коли тіло рухається по жолобу, на нього повинні діяти сила тяжіння та сила реакції опори зі сторони жолоба. Якщо тіло проходить верхню точку петлі, не відриваючись від жолоба, то сила реакції опори не повинна дорівнювати нулю.

У випадку руху тіла по жолобу з отвором (рис.1) між точками А та В, сила реакції зникає, а тіло продовжує рух під дією сили тяжіння по параболі, як тіло, кинуте під кутом до горизонту. Щоб тіло, яке вилетіло з точка А, знову дотикнулося до жолоба в точці В без удару об нього, швидкість тіла повинна

бути направлена по дотичній до жолоба, тобто перпендикулярно до радіус-вектора в точці В.

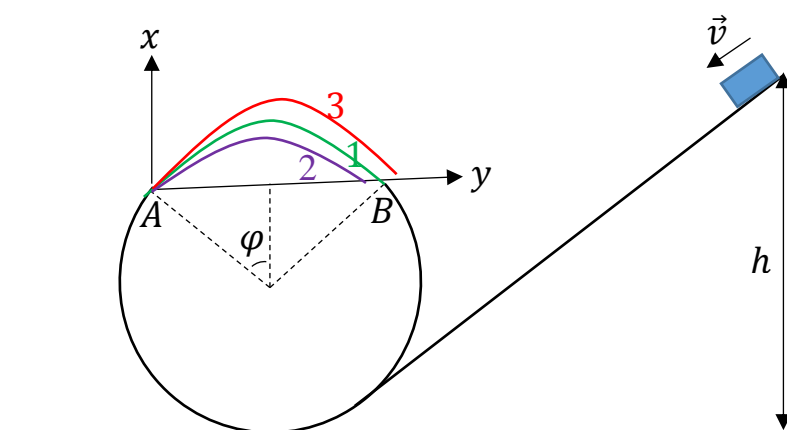


Рис. 1.

Позначимо швидкість тіла в точці А, як v . Тоді, для тіла, кинутого під кутом до горизонту, проекція швидкості на вісь Оу, дорівнює $v_y = v \sin \varphi - gt$. У верхній точці $v_y = 0$. Тоді час підйому тіла:

$$t = \frac{v \sin \varphi}{g} \quad (1)$$

Оскільки рух вздовж осі Ох рівномірний, то дальність польоту тіла (відстань між точками А і В) визначається як:

$$L = v \cos \varphi \cdot 2t. \quad (2)$$

З малюнка видно, що

$$L = 2R \sin \varphi. \quad (3)$$

Прирівняємо вирази (2) та (3) та підставимо вираз (1):

$$2R \sin \varphi = 2v \cos \varphi \cdot \frac{v \sin \varphi}{g}.$$

$$R = v^2 \frac{\cos \varphi}{g}.$$

Звідси,

$$v = \sqrt{\frac{gR}{\cos \varphi}} \quad (4).$$

З даною швидкістю тіло повинно вилітати, щоб пройти «мертву петлю». Якщо швидкість тіла буде меншою за v , то тіло полетить по параболі 2 нижче точки В. Якщо швидкість тіла буде більшою за v , то тіло вилетить з жолоба через розріз, рухаючись над жолобом по параболі 3.

Розрахуємо висоту похилої площини, з якої почало рухатися тіло, щоб пройти «мертву петлю». У момент початку руху повна механічна енергія тіла відносно нижнього положення жолоба дорівнює потенціальній енергії тіла:

$$E_1 = mgh.$$

У точці А тіло має як кінетичну, так і потенціальну енергію, а її повна механічна енергія в цій точці дорівнює

$$E_2 = mg(R + R \cos \varphi) + \frac{mv^2}{2}.$$

За законом збереження енергії $E_1 = E_2$ або

$$mgh = mg(R + R \cos \varphi) + \frac{mv^2}{2}.$$

Звідси,

$$v = \sqrt{2g(h - R(1 + \cos \varphi))}. \quad (5)$$

Прирівняємо вирази (4) та (5):

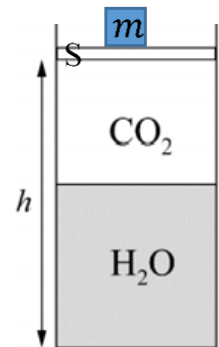
$$\sqrt{\frac{gR}{\cos \varphi}} = \sqrt{2g(h - R(1 + \cos \varphi))}$$

$$h = R(1 + \cos \varphi + \frac{1}{2 \cos \varphi}).$$

Якщо висота буде меншою за h , то тіло дійде по жолобу до точки А, а потім полетить по параболі 2. Якщо висота буде більшою, то тіло вилетить з жолоба та полетить по параболі 3.

Завдання 3

Під час приготування всім відомої газованої води вуглекислий газ (оксид карбону CO_2) подають під тиском у посудину з водою. Газ розчиняється у воді. Маса розчиненого в рідині газу прямо пропорційна тиску, під яким газ подається (закон Генрі). У вертикальному циліндрі, закритому невагомим поршнем, половину об'єму займає вода, над водою знаходиться вуглекислий газ. Поршень знаходиться на відстані 20 см від дна циліндра, площа поршня 10 см^2 . Коли на поршень ставлять вантаж масою 2 кг, він опускається на 3,12 см. Якої загальної маси вантаж треба розмістити на поршні, щоб весь вуглекислий газ розчинився у воді і поршень опустився до її поверхні? Поршень рухається без тертя. Температура стала. Об'єм води під час розчинення газу не змінюється. Атмосферний тиск 100 кПа.



Розв'язок

Якщо в рідині деякого об'єму V_0 під тиском p розчиняється деяка маса газу, то в нерозчиненому стані цей газ буде займати об'єм V під тим же тиском p . Ураховуючи закон Генрі, можна вважати, що співвідношення між об'ємами рідини та газу – $V = kV_0$, де k – коефіцієнт пропорційності.

За умовою задачі вуглекислий газ, розчиняючись у воді, буде займати додатковий об'єм V_B , рівний об'єму води, не змінюючи загальну масу газу в циліндрі під поршнем. Загальний об'єм газу в циліндрі складатиметься з об'єму газу над водою $V_r = \frac{Sh}{2}$ та об'єму газу $V = kV_B = k \frac{Sh}{2}$, розчиненого у воді.

Спочатку поршень створює тиск рівний атмосферному p_0 , оскільки за умовою поршень невагомий. Вантаж масою m створює додатковий тиск Δp , а сила додаткового тиску газу на поршень $F = \Delta p S$ повинна врівноважувати вагу вантажу $P = mg$:

$$mg = \Delta p S.$$

Звідси,

$$\Delta p = \frac{mg}{S} \approx \frac{2 \text{ кг} \cdot 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{10^{-3} \text{ м}^2} = 2 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

За законом Бойля-Маріотта для станів газу під дією атмосферного тиску та сумарного тиску, створеного вантажем і атмосферним тиском:

$$p_0(V_T + kV_T) = (p_0 + \Delta p)(V_T + kV_T - V_1),$$

де V_1 – об'єм газу, який розчинився після того, як на поршень поставили вантаж.

$$p_0 \left(\frac{Sh}{2} + k \frac{Sh}{2} \right) = (p_0 + \Delta p) \left(\frac{Sh}{2} + k \frac{Sh}{2} - Sh_1 \right),$$

де h_1 – висота, на яку опускається поршень під дією вантажу.

Перетворивши вираз, отримуємо значення коефіцієнта пропорційності k :

$$p_0 \frac{h}{2} (1 + k) = (p_0 + \Delta p) \left(\frac{h}{2} (1 + k) - h_1 \right);$$

$$k = \left(\frac{p_0}{\Delta p} + 1 \right) \frac{2h_1}{h} - 1 \approx 0,872.$$

Розглянемо випадок, коли на поршень поставили n вантажів і поршень опустився до поверхні води. Створений цими вантажами тиск дорівнює $n\Delta p$.

За законом Бойля-Маріотта:

$$p_0(V_T + kV_T) = (p_0 + n\Delta p)V_B,$$

де $V_B = k \frac{Sh}{2}$ – об'єм усього розчиненого у воді газу;

$$p_0 \frac{Sh}{2} (1 + k) = (p_0 + n\Delta p) k \frac{Sh}{2}.$$

Звідси $n = \frac{p_0}{k\Delta p}$, а загальна маса вантажу на поршні дорівнює

$$m_n = nm = \frac{p_0 m}{k\Delta p} = 11,5 \text{ кг}.$$

Завдання 4

По двох паралельних провідниках протікають електричні струми. Сила струму в першому провіднику дорівнює 10 А, у другому – 30 А. Провідники розташовані на відстані 10 см один від одного. Визначте відстань від провідників до точки, у якій магнітні поля однакові за величиною, але протилежні за напрямом.

Розв'язок

Можливі два випадки розміщення шуканої точки, які визначаються напрямками струмів у провідниках.

Випадок 1: струми в провідниках мають однаковий напрямок.

Визначимо за допомогою правила свердлика (правила правої руки) напрямки векторів індукцій магнітних полів \vec{B}_1 та \vec{B}_2 у точках А (зліва від першого провідника), С (між провідниками), Д (справа від другого провідника) (рис. 1).

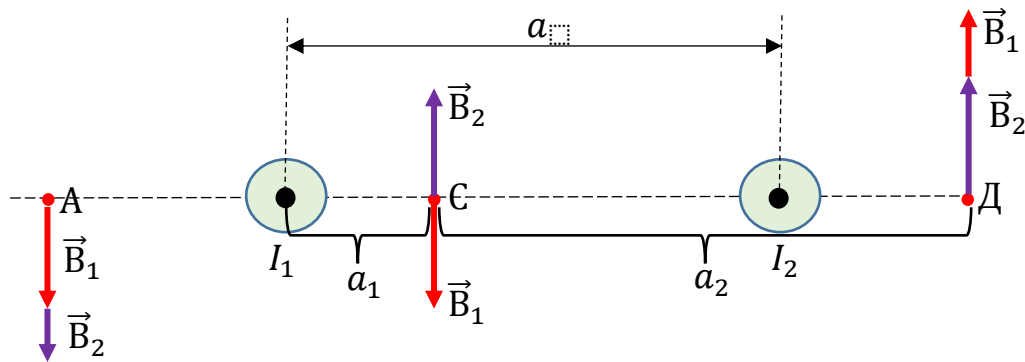


Рис. 1.

Очевидно, що умова виконується лише в точці С, розміщеній між провідниками.

Позначимо відстані від провідників до точки С a_1 та a_2 . Урахуємо, що $a_2 = a - a_1$.

Модулі векторів індукцій магнітних полів провідників у точці С дорівнюють:

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0 I_1}{2\pi a_1};$$

$$B_2 = \frac{\mu\mu_0 I_2}{2\pi a_2} = \frac{\mu\mu_0 I_2}{2\pi(a-a_1)}.$$

Прирівняємо вирази:

$$\frac{\mu\mu_0 I_1}{2\pi a_1} = \frac{\mu\mu_0 I_2}{2\pi(a-a_1)};$$

$$\frac{I_1}{a_1} = \frac{I_2}{a-a_1};$$

$$a_1 = \frac{I_1 a}{I_1 + I_2} = 2,5 \text{ см.}$$

$$a_2 = 10 \text{ см} - 2,5 \text{ см} = 7,5 \text{ см.}$$

Випадок 2: струми в провідниках протікають в протилежних напрямках. Визначимо за допомогою правила свердлика (правила правої руки) напрямки векторів індукцій магнітних полів \vec{B}_1 та \vec{B}_2 у точках А (зліва від першого провідника), С (між провідниками), Д (справа від другого провідника) (рис.2.).

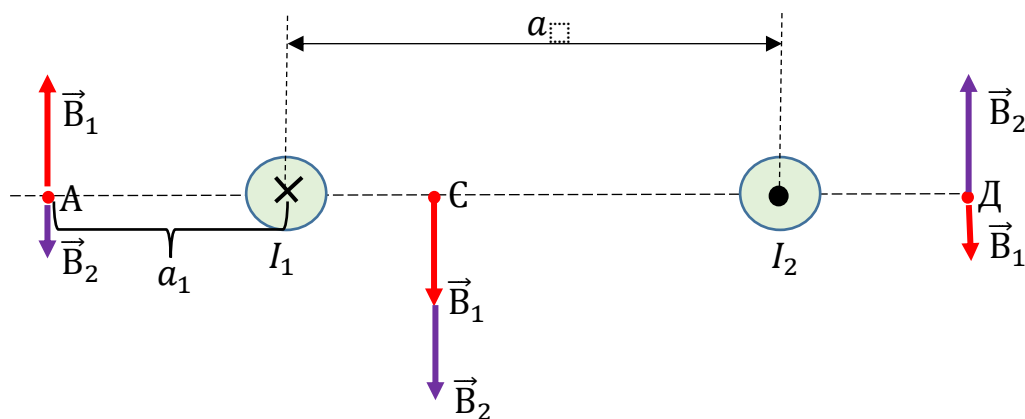


Рис. 2.

З рисунка видно, що протилежні напрямки вектори \vec{B}_1 та \vec{B}_2 мають у точках А і Д. Однак, у точці Д рівність модулів векторів неможлива, оскільки струм I_1 менший за струм I_2 , а провідник з цим струмом віддалений від точки Д більше, ніж провідник зі струмом I_2 . Тому $B_1 < B_2$ у точці Д.

У точці А:

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0 I_1}{2\pi a_1};$$
$$B_2 = \frac{\mu\mu_0 I_2}{2\pi(a_1+a)}.$$

Прирівняємо вирази:

$$\frac{\mu\mu_0 I_1}{2\pi a_1} = \frac{\mu\mu_0 I_2}{2\pi(a_1+a)};$$
$$\frac{I_1}{a_1} = \frac{I_2}{a_1+a};$$
$$a_1 = \frac{I_1 a}{I_2 - I_1} = 5 \text{ см.}$$
$$a_2 = 10 \text{ см} + 5 \text{ см} = 15 \text{ см.}$$