

Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2021-2022 рік

*«Не важливо з якою швидкістю ти рухаєшся до своєї мети,
головне – не зупинятися»
Конфуцій*

11 клас (високий рівень)

1. Учитель написав на дошці 5 попарно різних чисел. Після цього Петрик порахував суми кожних двох із цих чисел і виписав їх на лівій половині дошки, Василь зробив те ж саме для сум кожної трійки чисел та записав їх на правій половині дошки (сума Петриком та Василем записується стільки разів, скільки разів вона була отримана). Чи міг вчитель записати такі числа, щоб на лівій та правій половині дошки були записані однакові набори чисел, з урахуванням кількості разів, скільки вони там записані?
2. Задані $2n$ попарно різних натуральних чисел. Яку найбільшу кількість пар з цих чисел можна гарантовано вибрати так, щоб кожне число було не більше ніж в одній парі, і в кожній парі сума чисел була складеним числом?
3. В гострокутному трикутнику ABC точки H і O є точками перетину висот і центром описаного кола відповідно. Пряма HO перетнула сторони AB і AC в точках X і Y відповідно, причому точка H належить відрізку OX . Виявилося, що $XH = HO = OY$. Знайдіть градусну міру $\angle BAC$.
4. Дано $n \geq 4$ додатних чисел. Виявилось, що $\frac{n(n-1)}{2}$ попарних добутоків із цих чисел у якомусь порядку утворюють арифметичну прогресію. Доведіть, що всі числа рівні.
5. Для якого мінімального натурального n квадрат можна розрізати на $2n$ квадратів двох різних розмірів: n квадратів одного розміру та ще n – іншого розміру?

23 січня 2022 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2021-2022 рік

*«Не важливо з якою швидкістю ти рухаєшся до своєї мети,
головне – не зупинятися»
Конфуцій*

11 клас (високий рівень)

1. Учитель написав на дошці 5 попарно різних чисел. Після цього Петрик порахував суми кожних двох із цих чисел і виписав їх на лівій половині дошки, Василь зробив те ж саме для сум кожної трійки чисел та записав їх на правій половині дошки (сума Петриком та Василем записується стільки разів, скільки разів вона була отримана). Чи міг вчитель записати такі числа, щоб на лівій та правій половині дошки були записані однакові набори чисел, з урахуванням кількості разів, скільки вони там записані?
2. Задані $2n$ попарно різних натуральних чисел. Яку найбільшу кількість пар з цих чисел можна гарантовано вибрати так, щоб кожне число було не більше ніж в одній парі, і в кожній парі сума чисел була складеним числом?
3. В гострокутному трикутнику ABC точки H і O є точками перетину висот і центром описаного кола відповідно. Пряма HO перетнула сторони AB і AC в точках X і Y відповідно, причому точка H належить відрізку OX . Виявилося, що $XH = HO = OY$. Знайдіть градусну міру $\angle BAC$.
4. Дано $n \geq 4$ додатних чисел. Виявилось, що $\frac{n(n-1)}{2}$ попарних добутків із цих чисел у якомусь порядку утворюють арифметичну прогресію. Доведіть, що всі числа рівні.
5. Для якого мінімального натурального n квадрат можна розрізати на $2n$ квадратів двох різних розмірів: n квадратів одного розміру та ще n – іншого розміру?

23 січня 2022 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів