

Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2021-2022 рік

*«Не важливо з якою швидкістю ти рухаєшся до своєї мети,
головне – не зупинятися»
Конфуцій*

8 клас (високий рівень)

1. Задані 5 попарно різних натуральних чисел. Чи може їхнє середнє арифметичне бути:

- а) у 3 рази більшим за найбільший спільний дільник;
- б) у 2 рази більшим за найбільший спільний дільник?

2. Задана множина з n не обов'язково різних чисел $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, тобто деякі елементи множини можуть співпадати. Розглянемо усі $2^n - 1$ непорожні підмножини цієї множини, для кожної такої підмножини обчислимо суму її елементів. Яка найбільша кількість з обчислених сум могла виявитись рівною 1? Наприклад, для множини $\{-1; 2; 2\}$ маємо такі 7 непорожніх підмножин: $\{-1\}$, $\{2\}$, $\{2\}$, $\{-1; 2\}$, $\{-1; 2\}$, $\{2; 2\}$ та $\{-1; 2; 2\}$, з яких суму елементів, що дорівнює 1, мають рівно дві.

3. Навколо тупокутного трикутника ABC з тупим кутом при вершині B описане коло. Дотичні до цього кола у точках A і C перетинаються в точці P , а перпендикуляр до прямої BC , що проведений через точку B , перетинає AC у точці K . Доведіть, що $PA = PK$.

4. Серед натуральних чисел $1, 2, \dots, 2022$ обрали декілька. Виявилось, що сума будь-яких двох із цих обраних чисел не ділиться націло на жодну з різниць будь-яких двох з цих чисел. Знайдіть найбільшу можливу кількість обраних чисел.

5. У турнірі з підводного поло взяли участь 2022 команди, і кожні дві команди зіграли між собою рівно один матч. Кожній команді за перемогу, нічию та поразку нараховували відповідно 2, 1 та 0 очок. Виявилось, що жодні дві команди не набрали однакою кількість очок. У підсумковій таблиці команди розташували в порядку спадання кількості набраних очок. Під час перегляду регламенту виявилось, що кожний матч, в якому був переможець, мав закінчитись унічию, і навпаки, у кожному матчі, що закінчився внічию, мав бути переможець. При цьому виявилось, що знову жодні дві команди не набрали однакою кількість очок, і у підсумковій таблиці їх знову розташували в порядку спадання кількості набраних очок. Чи могло статися так, що новий порядок команд у підсумковій таблиці протилежний початковому?

23 січня 2022 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2021-2022 рік

*«Не важливо з якою швидкістю ти рухаєшся до своєї мети,
головне – не зупинятися»
Конфуцій*

8 клас (високий рівень)

1. Задані 5 попарно різних натуральних чисел. Чи може їхнє середнє арифметичне бути:

- а) у 3 рази більшим за найбільший спільний дільник;
- б) у 2 рази більшим за найбільший спільний дільник?

2. Задана множина з n не обов'язково різних чисел $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, тобто деякі елементи множини можуть співпадати. Розглянемо усі $2^n - 1$ непорожні підмножини цієї множини, для кожної такої підмножини обчислимо суму її елементів. Яка найбільша кількість з обчислених сум могла виявитись рівною 1? Наприклад, для множини $\{-1; 2; 2\}$ маємо такі 7 непорожніх підмножин: $\{-1\}$, $\{2\}$, $\{2\}$, $\{-1; 2\}$, $\{-1; 2\}$, $\{2; 2\}$ та $\{-1; 2; 2\}$, з яких суму елементів, що дорівнює 1, мають рівно дві.

3. Навколо тупокутного трикутника ABC з тупим кутом при вершині B описане коло. Дотичні до цього кола у точках A і C перетинаються в точці P , а перпендикуляр до прямої BC , що проведений через точку B , перетинає AC у точці K . Доведіть, що $PA = PK$.

4. Серед натуральних чисел $1, 2, \dots, 2022$ обрали декілька. Виявилось, що сума будь-яких двох із цих обраних чисел не ділиться націло на жодну з різниць будь-яких двох з цих чисел. Знайдіть найбільшу можливу кількість обраних чисел.

5. У турнірі з підводного поло взяли участь 2022 команди, і кожні дві команди зіграли між собою рівно один матч. Кожній команді за перемогу, нічию та поразку нараховували відповідно 2, 1 та 0 очок. Виявилось, що жодні дві команди не набрали однакою кількість очок. У підсумковій таблиці команди розташували в порядку спадання кількості набраних очок. Під час перегляду регламенту виявилось, що кожний матч, в якому був переможець, мав закінчитись унічию, і навпаки, у кожному матчі, що закінчився внічию, мав бути переможець. При цьому виявилось, що знову жодні дві команди не набрали однакою кількість очок, і у підсумковій таблиці їх знову розташували в порядку спадання кількості набраних очок. Чи могло статися так, що новий порядок команд у підсумковій таблиці протилежний початковому?

23 січня 2022 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів