

**Завдання**

**II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики  
2020-2021 н.р.**

**6 клас**

1. Натуральні числа від 1 до 2020 написані на дошці. Петрик підкреслив усі числа, що діляться 2, Василь підкреслив нижче усі числа, що діляться на 3, а далі Оксанка – усі числа, що кратні 4. З'ясуйте, скільки чисел підкреслено рівно два рази?

2. У книзі 300 сторінок. З'ясуйте, скільки разів при нумерації сторінок зустрічається цифра 9? Відповідь обґрунтуйте.

3. Якщо Оленка віддасть Тарасу 3 яблука, то у Тараса стане вдвічі більше яблук, ніж у Оленки, а якщо Тарас віддасть Оленці 2 яблука, то в Оленки стане втричі більше яблук, ніж у Тараса. З'ясуйте, скільки яблук в обох дітей разом? Відповідь обґрунтуйте.

4. Оля, Таня, Оксана й Катя вміють грати на різних музичних інструментах: бандурі, арфі, акордеоні та скрипці, але кожна тільки на одному. Вони також знають іноземні мови: англійську, французьку, німецьку, іспанську, проте кожна лише одну. Відомо, що дівчина, яка грає на акордеоні, говорить іспанською. Таня не грає ні на скрипці, ні на арфі й не знає англійської мови. Оля не грає ні на скрипці, ні на арфі й не знає ні німецької, ні англійської мови. Дівчина, котра говорить німецькою, грає на бандурі. Оксана знає французьку мову, але не грає на скрипці. З'ясуйте, хто на якому інструменті грає та якою мовою розмовляє? Відповідь обґрунтуйте.

5. Із 5 монет, які на зовнішній вигляд однакові, є 3 справжні та 2 фальшиві монети. При цьому, справжні монети важать однаково, а щодо фальшивих – одна з них легша за справжню, а інша – важча. З'ясуйте, чи вдасться за 2 зважування на шалькових вагах без гирьок визначити принаймні одну фальшиву монету? Відповідь обґрунтуйте.

На виконання роботи відводиться 3 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів

Використання цифрових пристроїв не дозволяється

**Завдання**

**II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики  
2020-2021 н.р.**

**7 клас**

1. На дошці записані числа 1, 2, 3, ..., 2020. Миколка підкреслив усі числа, які діляться на 2, потім – усі числа, які діляться на 3, і, нарешті, – усі числа, які діляться на 5. З'ясуйте, скільки чисел він підкреслив двічі? Відповідь обґрунтуйте.

2. У січні Петрик щоденно купляв собі від однієї до трьох машинок. Першого лютого він спробував усі куплені машинки розставити в прямокутник. Коли він розставив їх у ряди по 7 машинок у кожному ряді, то виявилась 1 зайва машинка. Коли розставив у ряди по 10 машинок, то зайвими лишилися 2 машинки. З'ясуйте, чи зможе Петрик розставити їх у ряди по 4 машинки? Відповідь обґрунтуйте.

3. У дідуся в садочку достигли яблука: антонівка, малинівка та айдаред. Якби би антонівки було втричі більше, то сумарна кількість яблук зросла б на 70%. Якщо б було втричі більше малинівки, то сумарна кількість яблук зросла б на 50%. З'ясуйте, на скільки відсотків зміниться сумарна кількість яблук, якщо було б втричі більше айдареду? Відповідь обґрунтуйте.

4. У середині тупого кута  $AOB$  провели три промені  $OC$ ,  $OD$  і  $OE$ , причому  $OC \perp OA$ ,  $OD$  – бісектриса кута  $AOB$  і  $OE$  – бісектриса кута  $BOC$ . Знайдіть величину кута  $DOE$ .

5. Є 9 гир вагою 1 г, 2 г, ..., 9 г. Антон та Олена по черзі беруть гирі та кладуть їх на ваги зі стрілкою, не знімаючи попередні. Якщо після чергової гирі стрілка покаже вагу більше 25 г, то той, хто поклав цю гирю, програв. З'ясуйте, хто може перемогти в цій грі, якщо кожний намагається перемогти та перший хід робить Антон? Відповідь обґрунтуйте.

6. У класі 30 учнів. З'ясуйте, чи може так статися, що 9 з них мають по 5 друзів, 11 учнів мають по 6 друзів, а 10 учнів по 3 друга? Відповідь обґрунтуйте.

На виконання роботи відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів

Використання цифрових пристроїв не дозволяється

**Завдання**

**II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики  
2020-2021н.р.**

**8 клас**

1. Знайдіть остачу та частку від ділення числа  $8^{2020} + 4^{2020}$  на число  $8^{2018} + 4^{2017}$ .

2. Ненульові числа  $a, b$  задовольняють умови:

$$6a + 6b = \frac{25}{a} + \frac{25}{b} = 25.$$

З'ясуйте, чому може дорівнювати значення виразу  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ?

3. У рівнобічній трапеції  $ABCD$  ( $AB=CD$ ,  $BC<AD$ ) проведені висота  $BH$  та діагональ  $BD$ . З'ясувалося, що ця діагональ є бісектрисою кута  $CDA$ . Доведіть, що величина кута  $HBD$  дорівнює сумі величин кутів  $ABH$  і  $CBD$ .

4. Заданий ромб, у якого всі сторони та одна з діагоналей рівні 6 см. У середині або на сторонах цього ромба вибирають довільним чином 9 точок. Доведіть, що принаймні дві з них знаходяться на відстані не більшій від 3 см.

5. Маємо 5 гир, на яких написано, що вони важать 1 г, 2 г, 3 г, ..., 9 г відповідно. Відомо, що рівно одна з гир важить легше, ніж на ній зазначено. З'ясуйте, чи можна на терезах з двома шальками без додаткових гир визначити хибну гирю не більше ніж за 2 зважування? Відповідь обґрунтуйте.

6. У прямокутнику  $5 \times 6$  зафарбовано 19 клітинок. Доведіть, що в ньому можна обрати квадрат  $2 \times 2$ , у якому зафарбовано не менше трьох клітинок.

На виконання роботи відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів

Використання цифрових пристроїв не дозволяється

**Завдання**

**II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики  
2020-2021 н.р.**

**9 клас**

1. Обчислити значення виразу:  $\sqrt{2021+2\sqrt{2020}} - \sqrt{2021-2\sqrt{2020}}$ .

2. Серед 2020 однакових на вигляд монет одна монета фальшива, вона легша за інші. Марійка збирається виявити фальшиву монету, порівнюючи при кожному зважуванні маси двох купок з однаковою кількістю монет. З'ясуйте, як їй гарантовано вдасться в такий спосіб виявити фальшиву монету за 7 зважувань? Відповідь обґрунтуйте.

3. Числа  $a, b$  задовольняють рівність:

$$\frac{a-b}{a^2+ab} + \frac{a+b}{a^2-ab} = \frac{3a-b}{a^2-b^2}.$$

З'ясуйте, які значення може приймати  $\frac{b}{a}$ ? Відповідь обґрунтуйте.

4. На площині розташовані 2020 точок, кожні 3 з яких утворюють трикутник з площею, що не перевищує 1. З'ясуйте, чи обов'язково всі ці точки можна покрити трикутником з площею 4? Відповідь обґрунтуйте.

5. Дано опуклий чотирикутник  $ABCD$ , у якого  $\angle CBD = 90^\circ$ ,  $\angle BCD = \angle CAD$  і  $AD = 2BC$ . Доведіть, що  $CA = CD$

6. Петрик та Василь грають у гру з записаними числами на дошці. За один хід, розпочинає Петрик, гравець вибирає два взаємно прості числа, що записані на дошці, витирає їх, і записує замість них їхню суму. Той, хто не може зробити ходу – програє. З'ясуйте, хто переможе при правильній грі, якщо з самого початку на дошці записані 2020 цифр 1? Відповідь обґрунтуйте.

На виконання роботи відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів

Використання цифрових пристроїв не дозволяється

**Завдання**

**II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики  
2020-2021 н.р.**

**10 клас**

1. Обчисліть  $\sqrt{1+2019\sqrt{1+2020\sqrt{1+2021\cdot 2023}}}$ .

2. На нараду в міністерство для обговорення питань олімпіад запросили 30 Заслужених учителів України з математики, фізики, хімії та біології. Серед запрошених фізиків та біологів разом виявилось удвічі менше, ніж математиків, а фізиків і хіміків разом удвічі більше, ніж біологів. З'ясуйте, скільки на зустріч запросили математиків, якщо вчителів із кожного предмету була різна кількість? Відповідь обґрунтуйте.

3. Точки  $A, B, C, D$  розміщено в просторі так, що вони не лежать в одній площині. Нехай  $M, N, H$  і  $L$  – середини відрізків  $AB, AD, DC, CB$  відповідно. Доведіть, що  $MH^2 + NL^2 = \frac{1}{2}(BD^2 + AC^2)$ .

4. В одній із вершин куба сидить комаха. З'ясуйте, чи може вона проповзти по всім ребрам рівно по 1 разу та повернутися в початкову вершину? Відповідь обґрунтуйте.

5. Побудуйте геометричне місце точок площини, що задовольняють заданій нерівності:

$$|y + 2019| \leq \left( \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2} \right)^{2020}.$$

6. Скількома способами на шахівницю  $n \times n$ ,  $n \geq 3$ , із якої вирізані дві протилежні по діагоналі кутових клітинки  $1 \times 1$ , можна виставити  $n$  тур, жодні дві з яких не атакують одна одну?

Тура – шахова фігура, яка атакує всі поля як по горизонталі, так і по вертикалі відносно поля, у якому вона розташована.

На виконання роботи відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів

Використання цифрових пристроїв не дозволяється

## Завдання

### II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2020-2021 н.р.

#### 11 клас

1. Побудуйте графік функції  $y = \sqrt[2019]{\sin^{2019} x} + \sqrt[2020]{\sin^{2020} x}$ .
2. Розв'яжіть рівняння:  $2020^x - 2019^x = 1$ .
3. В одній із вершин куба сидить комаха. З'ясуйте, чи може вона проповзти по всім ребрам рівно по 1 разу та повернутися в початкову вершину? Відповідь обґрунтуйте.
4. На середній лінії  $MN$  трапеції  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ) обрано точки  $F$  і  $G$  так, що  $\angle ABF = \angle CBG$ . Доведіть, що  $\angle BAF = \angle DAG$ .
5. Знайдіть усі значення параметра  $a$ , для яких система рівнянь
$$\begin{cases} a(x^{2020} + 1) = y^{2021} + 1 - x^{1010} \\ x^{4040} + y^{4040} = 1 \end{cases}$$
має єдиний розв'язок.
6. Побудуйте графіки всіх таких функцій  $f(x)$ , що визначені на множині дійсних чисел, які для довільних дійсних  $x, y$  задовольняють рівність:
$$f(xy) = xf(y) + 2020f(x) + 2019.$$

На виконання роботи відводиться 4 години  
Кожна задача оцінюється в 7 балів  
Використання цифрових пристроїв не дозволяється