Відповіді II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2020-2021 н.р.
6 клас

1. Чисел, що кратні 4, усього $\frac{2020}{4}=505$. Усі вони підкреслені щонайменше

2 рази. Але кожне третє з цих чисел кратне ще й 3, тобто їх треба викреслити з цієї кількості: 4, 8, 12, 16, 20, 24, …, тобто з подільності з остачею $505=3\cdot 168+1$ таких чисел 168, тобто чисел такого типу $505-168=337$.

Тепер ще двічі підкреслені усі числа, що кратні 2 та 3, але не кратні 4. Їх можна порахувати таким чином, чисел, що кратні 2 але не кратні 4 – так само 505. З них кратні 3 кожне третє: 2, 6, 10, 14, 18, 22, …, тобто їх так само 168.

Тобто усього цих чисел $337+168=505$.

Відповідь: 505.

2. Зауважимо, що кількості цифр 9, що зустрічаються при нумерації сторінок 1-100; сторінок 101-200 та сторінок 201-300 є рівними.

Порахуємо кількість цифр 9, що зустрічаються при нумерації сторінок 1-100.

Цифра 9 зустрічається по одному разу в номерах $9+10k$, $k=0, 1, …. 8$, 90-98 і два рази в номері 99, тобто 9+9+2=20 разів.

Тому всього при нумерації книги було використано60 цифр 9.

Відповідь: використано 60 цифр 9.

3. І спосіб. Нехай у Оленки x, а у Тараса y яблук.

Тоді $y + 3 = 2(x - 3)$ та $x + 2 = 3(y - 2)$, звідки $x = 7$, $y = 5$.

ІІ спосіб. У першому випадку Оленка отримає третину, а у другому – три чверті від загальної кількості яблук, або на 5 яблук більше.

Отже, $\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$ від загальної кількості яблук це 5 яблук, а загальна кількість – 12 яблук.

Залишається зробити перевірку: у першому випадку Оленка має дістати 4 яблука, а у другому – 9 яблук. Це справді можливо, якщо у неї 7 яблук, а у Тараса 5.

Відповідь: 12 яблук

4. **Відповідь:** Оля – акордеон, іспанська; Таня – бандура, німецька; Оксана – арфа, французька; Катя – скрипка, англійська.

5. Спочатку зважимо дві довільні монети, наприклад 1 та 2. Якщо вони у рівновазі, то вони справжні. Далі просто порівнюємо 1 та 3. Якщо вони в рівновазі, то монети 4 та 5 – фальшиві. Якщо ні, то монета 3 фальшива. Нехай, наприклад, 1 важча за 2. Тоді 1 – В (більш важка фальшива), тоді 2 – С (справжня) чи Л (більш легка фальшива), або 1 – С та 2 – Л. Зважимо тепер 1 та 2 на одних шальках та 3 та 4 на інших. Якщо 1 та 2 переважили або у рівновазі 3 та 3, то там не може бути пари С+Л, бо вона не в змозі переважити будь-яку іншу пару а також бути з нею в рівновазі. Тому 1 – фальшива. Якщо 1 та 2 виявилися більш легкими за 3 а 4, то це може статися лише за умов що 2–Л, тобто фальшива.

Відповідь: так.

7 клас

1. Двічі ним підкреслені числа, які діляться на 6, на 10 та на 15, але не діляться на 30. Останні будуть підкреслені Миколкою тричі. Отже, їх потрібно вилучити як зі списку підкреслених чисел, які діляться на 6, так і зі списків підкреслених чисел, кратних 10 та 15. Усього отримуємо:

$$\frac{2016}{6}+\frac{2020}{10}+\frac{2010}{15}-3\cdot\frac{2010}{30}=336+202+134-201=471.$$

У чисельниках дробів записані найбільші натуральні числа, які не перевищують 2020 і діляться націло на 6, 10, 15 та 30 відповідно.

Можна було міркувати ще й так. Серед кожних 30 послідовних натуральних чисел підкресленими двічі будуть 7 чисел, які при діленні на 30 дають остачі 6, 10, 12, 15, 18, 20 та 24. Від 1 до 2010 таких груп по 30 чисел є 67. Крім них, двічі будуть підкреслені ще й числа 2016 та 2020. Разом:

$7\cdot 67+2=471$.

Відповідь: 471 число..

2. Для деяких натуральних n, k повинна виконуватись рівність:

$$7k+1=10n+2 \text{ або } 7k=10n+1.$$

Тобто треба знайти число між 29 та 92, яке закінчується на цифру 1 та ділиться на 7. Найменшим таким число є 21, але воно менше за 30. Наступним числом є число 91. Зрозуміло, що інших чисел не існує у вказаному проміжку. Таким чином усього машинок у Петрика:

$$7k+1=91+1=92.$$

Оскільки $92=4\cdot 23$, то розставити в ряд по 4 він зможе.

Відповідь: так.

3. І спосіб . Якби кожного сорту яблук було втричі більше, то сумарна кількість яблук зросла б на 200%. Із них 70% складає збільшення за рахунок антонівки, 50% – збільшення за рахунок малинівки. Отже, збільшення за рахунок айдареда складає 200% – 70% – 50% = 80%.

ІІ спосіб . Оскільки додавання подвоєної кількості антонівки дає 70%, то антонівка складає 0,35 від всіх яблук. Аналогічно, малинівка складає 0,25 від всіх яблук. Отже, доля айдареда – 0,4. Якщо до числа двічі додати по 0,4, то число зросте на 80%.

Відповідь:збільшилось на 80%.

4. Нескладно переконатися, що промені розташовані в такому порядку: *OA, OD, OC, OE, OB.* Якщо $\angle AOB=2\alpha$, то $\angle BOD=\alpha$, $\angle BOE=\alpha-45°$, а тому $\angle DOE=\angle BOD-\angle BOE=45°$.

Відповідь: 45°.

5. Першим ходом Антон кладе гирю вагою 5 г. А далі просто якщо Олена вибирає гирю вагою n г, то він вибирає гирю, вагою $10-n$ г. Так після його третього ходу на шальках буде рівно 25 г і Олена програє наступним ходом.

Відповідь: перемагає Антон.

6. Припустимо,що таке може статися. Усіх учнів цього класу ми можемо розглядати як вершини графу. Тоді ребрами цього графу будуть відповідно дружні стосунки між учнями. У даному графі ми отримаємо, що 9 вершин мають степінь 5, 11 вершин мають степінь 6, і 10 вершин мають степінь 3. Отримали, що в даному

графі є 19 вершин непарної степені. Але кількість вершин непарної степені повинна бути парною. Прийшли до суперечності. Тому цього не може бути.

Відповідь: ні, не може бути.

8 клас

1. $\frac{8^{2020}+4^{2020}}{8^{2018}+4^{2017}}=\frac{4^{2020}\left(2^{2020}+1\right)}{4^{2017}\left(8\cdot 2^{2017}+1\right)}=4^3=64.$

Відповідь: остача та частка від ділення – 0 та 64.

2. З умови задачі маємо, що $6(a+b)=\frac{25(a+b)}{ab}=25$. Оскільки $a+b=\frac{25}{6}$, то $ab=\frac{25}{6}$. Враховуючі, що $a+b=ab$, маємо, що

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}=(a+b)-2=\frac{25}{6}-2=\frac{13}{6}.$$

Відповідь: $\frac{13}{6}$.

3. Нехай $\angle \mathrm{HBD}=\alpha$, $\angle \mathrm{ABH}=\beta$, $\angle \mathrm{CBD}=\gamma$. Оскільки DB – бісектриса кута CDA, то $\angle \mathrm{CDB}=\angle \mathrm{BDA}$, а враховуючи паралельність BC і AD, маємо, що $\angle \mathrm{CDB}=\angle \mathrm{CBD}=\gamma$. Отже, $\angle \mathrm{BAD}=\angle \mathrm{CDA}=2\gamma$ (бо трапеція рівнобічна). Тому $2\gamma+\beta=90°=\alpha+\gamma$, і $\alpha=\beta+\gamma$.

4. Розіб'ємо цей ромб спочатку на два правильних трикутники (рис. 3). А тепер кожний з них розіб'ємо на 4 рівних рівносторонні трикутники зі стороною 3 см. Усього маємо 8 трикутників, а точок 9, то за принципом Діріхле принаймні дві з них попадуть у один трикутник. Але найбільша відстань між точками в цьому трикутнику не перевищує 3 см, що й треба було довести.

5. Покладемо на шальки при першому зважуванні гирі $1+4+9$ на ліву та $2+5+7$ на праву. Якщо маємо рівність $1+4+9=2+5+7$, то фальшива гиря серед інших трьох.

Тоді покладемо на шальки, наприклад, такі комбінації: $3+4$ та $1+6$.

Якщо $3+4=1+6$, то ці гирі – справжні, тому фальшива 8.

Якщо $3+4<1+6$, то фальшива 3, бо фальшива – більш легка і там її треба шукати. З урахуванням першого зважування нею є 3.

Аналогічно, при $3+4>1+6$ фальшивою є 6.

Аналогічно, якщо при початковому зважуванні вийшла нерівність, то фальшива там, де менша вага. Решта шість гир справжні. Залишається покласти на різні шальки по одній потенційно фальшивій і врівноважити їх справжніми. Наприклад, $1+5$ та $4+2$. Далі все аналогічно, фальшива на більш легкій шальці терезів, при рівновазі – та, що не покладена.

Відповідь: так, можна.

6. Розріжемо даний прямокутник 5×6 на шість однакових фігур, як показано на рисунку (1)

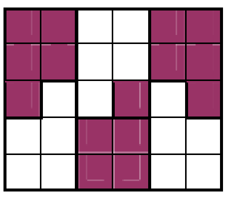

Рис. 1

Тоді за принципом Діріхлє, існує принаймні одна (з 6-ти таких 5-клітинкових фігур) фігура F_1, в якій розфарбовано щонайменше 4 клітинки (бо $19=6\times 3+1$);

3) При довільному розфарбуванні 4 клітинок у середині фігури F_1 «пунктирний» квадрат 2×2 містить щонайменше 3 зафарбовані клітинки (рис.2).

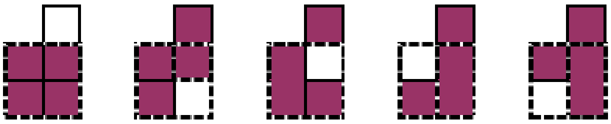

Рис. 2

9 клас

1. $\sqrt{2021+2\sqrt{2020}}-\sqrt{2021-2\sqrt{2020}}=\sqrt{\left(\sqrt{2020}\right)^2+2\sqrt{2020}+1}-\sqrt{\left(\sqrt{2020}\right)^2-2\sqrt{2020}+1}=$

$=\sqrt{\left(\sqrt{2020}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2020}-1\right)^2}=\sqrt{2020}+1-\left(\sqrt{2020-1}\right)=2$.

Відповідь: 2.

2. Спочатку розіб’ємо всі монети на 3 купки по 673, 673 та 674 монети і порівняємо маси перших двох купок. Якщо одна з них легша, то фальшива монета знаходиться саме в ній. Інакше – фальшива монета в третій купці. Вибираємо купку з фальшивою монетою і для зручності наступних міркувань доповнюємо кількість монет у ній до 729 справжніми монетами з інших купок.

Ділимо цю купку на 3 рівні частини по 243 монети. Порівнявши маси двох із таких частин, аналогічно як при першому зважуванні знайдемо ту частину, яка містить фальшиву монету.

Здійснюємо її поділ на 3 купки по 81 монеті і так само третім зважуванням визначаємо купку з фальшивою монетою.

Четверте зважування зведеться до порівняння мас двох купок по 27 монет, п’яте – двох купок по 9 монет, шосте – двох купок по 3. І, нарешті, порівнюючи з трьох монет, які залишилися, дві, або зразу сьомим зважуванням виявимо фальшиву, або ж такою буде монета, яка не брала участі в останньому зважуванні.

3. Числа a, b задовольняють рівність:

$$\frac{a-b}{a^2+ab}+\frac{a+b}{a^2-ab}=\frac{3a-b}{a^2-b^2}.$$

З умов задачі випливає, що $a\neq 0$ та $a\neq \pm b$. Тепер якщо звести все до спільного знаменника та виписати рівність чисельників одержимо, що $(a-b)^2+(a+b)^2=a(3a-b)$. Звідси $a^2-ab-2b^2=0$ або $(a-2b)(a+b)=0$. Оскільки $a\neq -b$, то $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$.

Відповідь: $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$.

4. Розглянемо трикутник найбільшої площі серед утворених трикутників з вершинами в заданих точках, якщо таких декілька,то будь-який з них.

Нехай це ΔABC. Розглянемо $\Delta A_1B_1C_1$, для якого сторони ΔABC – є середніми лініями.

Тоді площа $\Delta A_1B_1C_1$ дорівнює 4, при цьому жодна точка не може лежати поза $\Delta A_1B_1C_1$.

Дійсно, якщо точка D лежить поза $\Delta A_1B_1C_1$ (рис. 3), наприклад, не потрапляє в смугу між паралельними прямими AC та A_1C_1, то $S(\Delta ADC)>S(\Delta ABC)$, що суперечить тому, що ΔABC був трикутником найбільшої площі.

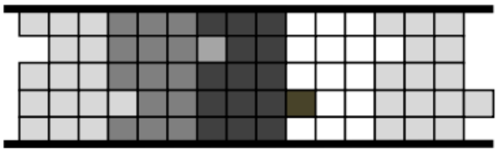

Рис. 3

Відповідь: так.

5. Нехай точка C_1 симетрична точці C відносно точки B (рис. 4).

Тоді $\angle BCD = \angle CAD = \angle DC_1C$, звідки чотирикутник $ADCC_1$ – вписаний. Оскільки $AD = 2BC = CC_1$, то $\angle CDC_1 = \angle DC_1A$, бо спираються на рівні дуги, щостягнені рівними хордами.

Отже $C_1A \| CD$, а тому вписаний чотирикутник $ADCC_1$ – рівнобічна трапеція або прямокутник.

Чотирикутник $ADCC_1$ не може бути прямокутником, оскільки тоді з точки D на пряму BC було б опущено два різні перпендикуляри – DB та DC.

Отже $ADCC_1$ є рівнобічною трапецією, тому $AC = C_1D = DC$.

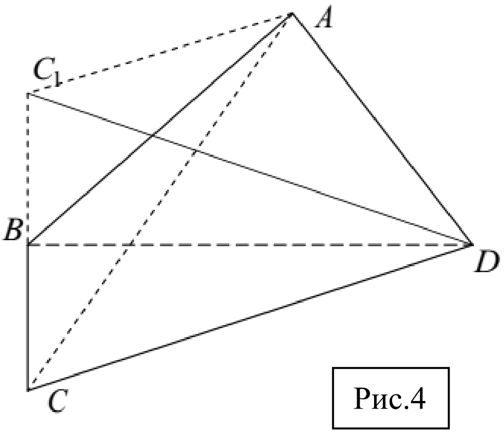

Рис.4

6. Першим ходом Петрик витирає два числа 1 і записує число 2. Василь робить число 3 . Якщо в певний момент на дошці записані деяке непарне число n , а також $2019 - n$ чисел 1, то Петрик може або записати замість двох чисел 1 число 2, на що Василь замінює числа n та 2 на число $n + 2$, або замість числа n та однієї 1 записати $n + 1$, на що Василь своїм ходом запише знову замість $n + 1$ та однієї 1 число $n + 2$, і переможе.

Перед останнім ходом Петрика на дошці записані чотири числа 2017, 1, 1 та 1. Якщо Петрик робить набір таких трьох чисел 2018, 1 та 1, тоді Василь робить набір 2018 та 2 і Петрик не може зробити ходу. Якщо Петрик робить набір таких трьох чисел 2017 , 2 та 1, тоді Василь робить знову набір 2018 та 2 і Петрик не може зробити ходу

Відповідь: перемагає Василь.

10 клас

1.Скориставшись рівністю$1+(n-1)(n+1)=n^2$, отримаємо

$$\sqrt{1+2019\sqrt{1+2020\sqrt{1+2021\cdot 2023}}} = \sqrt{1+2019\sqrt{1+2020\cdot 2022}} = = \sqrt{1+2019\cdot 2021} = 2020$$

Відповідь:. 2020.

2. Позначимо кількість вчителів математиків, фізиків, хіміків та біологів через $m,\ f,\ h,\ b$ відповідно. Тоді маємо такі умови:

$$\begin{cases} m+f+h+b=30, \\ f+b=\frac{1}{2}m, \\ f+h=2b. \end{cases}$$

З другого та третього рівняння маємо: $m=2f+2b$ та $h=2b-f$.

Якщо це підставити у перше рівняння, то матимемо, що $2f+5b=30$. Оскільки $m,\ f,\ h,\ b$ – цілі невід'ємні числа, то зрозуміло, що b повинно бути парним числом від 0 до 6.

Залишилося розглянути ці варіанти.

$$b=0 \Rightarrow f=15 \Rightarrow m=30 \Rightarrow h=-15.$$
$$b=2 \Rightarrow f=10 \Rightarrow m=24 \Rightarrow h=-6.$$
$$b=4 \Rightarrow f=5 \Rightarrow m=18 \Rightarrow h=3.$$
$$b=6 \Rightarrow f=0 \Rightarrow m=12 \Rightarrow h=12.$$

З умов задачі, очевидно, що шуканим є варіант, де $m=18$.

Відповідь: 18..

3. *NH* є середньою лінією трикутника ADC, тому *NH*||*AC* і AC=2*NH*.

Аналогічно *ML*||*AC*, *AC=2ML*.

Тому прямі *NL* і *ML* паралельні. А отже лежать в одній площині.

Тому чотирикутник *NHML* є паралелограмом.

Ураховуючи, що *BD*=2*NM*=2*HL,* і зв'язок між довжинами сторін і діагоналей паралелограма. Отримаємо необхідну рівність.

4. Вважаємо вершини куба вершинами графа, а його ребра – ребрами графа. Нам потрібно дізнатися, чи існує Ейлерів цикл або Ейлерів ланцюг у графі. Ейлерів цикл існує, якщо в графі є 0 або 2 вершини непарної степені.

Але в куба 8 вершин і всі вони степені 3, тому Ейлерового циклу в ньому не буде. тже, комаха не зможе вона проповзти по всім ребрам рівно по 1 разу та повернутися в початкову вершину.

Відповідь: не зможе.

5. Побудувати геометричне місце точок площини, що задовольняють заданій нерівності:

$$|y+2019| \le \left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}\right)^{2020}.$$

Оскільки $D(f):\begin{cases} x^2-1 \ge 0, \\ 1-x^2 \ge 0 \end{cases}$, тобто $x \in \{\pm 1\}$.

То дана нерівність рівносильна такій:

$|y+2019| \le 0$ при $x \in \{\pm 1\}$, що можливо лише якщо $y=-2019$.

Таким чином, слід побудувати тільки дві точки $(-1;-2019)$, $(1;-2019)$.

6. Без обмеження загальності вважаємо, що вирізана ліва нижня клітинка A та права верхня – Z. Спочатку з'ясуємо скількома способами тури таким чином можна розставити на шахівниці $n\times n$. Таких варіантів $n!$, оскільки для тури у першій вертикалі є n варіантів, для тури у другому стовпчику вже лишається $n-1$ варіант і так далі. Розглянемо розстановки тур, при яких одна з тур займає поле A. Таких

розстановок (n –1)!, аналогічно (n –1)! варіантів розстановок, при яких одна з тур стоїть в позиції Z . У виразі n!–2(n –1)! двічі відкинуті ті позиції, в яких дві тури займають одночасно позиції A та Z . Таких позицій усього (n – 2)!. Таким чином шукана кількість варіантів дорівнює 10 $n!-2(n-1)!+(n-2)!=(n-2)!\cdot(n(n-1)-2(n-1)+1)=(n-2)!\cdot(n^2-3n+3)$.

11 клас

1. Побудувати графік функції $y=\sqrt[2019]{\sin^{2019}x}+\sqrt[2020]{\sin^{2020}x}$

Функція $y\in 2\pi$ –періодична і $y=\begin{cases}2\sin x, x\in[0;\pi],\\ 0, x\in[\pi;2\pi].\end{cases}$

2. $2020^x-2019^x=1$.

Перепишемо дане рівняння так: $\left(\frac{2020}{2019}\right)^x-1=\left(\frac{1}{2019}\right)^x$.

Функція в лівій частині рівняння зростає, в правій – спадає. Отже, рівняння має не більше 1 розв'язку.

Відповідь: x=1.

3. Вважаємо вершини куба вершинами графа, а його ребра – ребрами графа. Нам потрібно дізнатися, чи існує Ейлерів цикл або Ейлерів ланцюг у графі.

Ейлерів цикл існує, якщо в графі є 0 або 2 вершини непарної степені.

Але в куба 8 вершин і всі вони степені 3, тому Ейлерового циклу в ньому не буде.

Отже, комаха не зможе вона проповзти по всім ребрам рівно по 1 разу та повернутися в початкову вершину.

Відповідь: не зможе.

4.

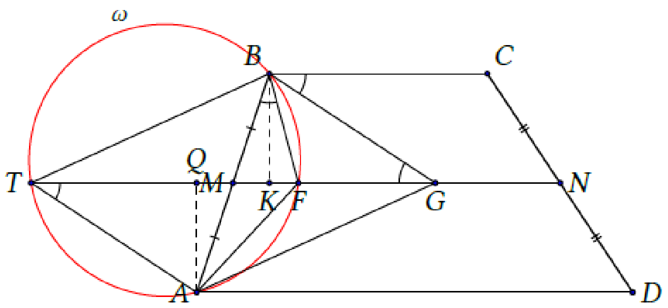

Рис. 5

Опишемо коло ω навколо Δ AFB. Нехай T – друга точка перетину прямої MN з колом ω. Тоді $\angle FTA$ = $\angle FBA$ (вписані, які опираються на одну дугу). Аналогічно, $\angle BTF$ = $\angle BAF$.

$\angle BGT$ = $\angle GBC$ (як внутрішні різносторонні).

Оскільки $\angle BGT$ = $\angle GTA$, то $BG \parallel TA$.

Разом з тим BG = TA,. оскільки $\Delta BKG=\Delta AQT$ (за катетом та гострим кутом).

Таким чином, $ATBG$ – паралелограм, $\angle BTG$ = $\angle TGA$ (як внутрішні різносторонні).

Але $\angle TGA$=$\angle GAD$ (як внутрішні різносторонні).

Отже, $\angle BAF$ = $\angle DAG$.

5. $\begin{cases} a(x^{2020}+1) = y^{2021}+1-x^{1010} \\ x^{4040}+y^{4040}=1 \end{cases}$

Зрозуміло, що якщо пара (*x; y*) є розв'язком системи, то і пара (-*x; y*) також є розв'язком цієї системи.

Тому розв'язок буде єдиним тільки у випадку, коли це (0; *y*) при деякому *y*. Тоді *y* = 1 і *a* = 2 або *y* = - 1 і *a* = 0.

У випадку *a* = 0 точки (±1; 0) є також розв'язками системи, отже *a* = 0 не задовольняє умовам задачі.

Покажемо, що при *a* = 2 розв'язок (0; 1) – єдиний.

Дійсно, з першого рівняння системи $\begin{cases} 2x^{2020}+x^{1010}+1 = y^{2021} \\ x^{4040}+y^{4040}=1 \end{cases}$ випливає, що $y \geq 1$, а з другого, що $y \leq 1$. Отже *y* = 1, а тоді *x* = 0.

Відповідь: *a* = 2.

6. Побудувати графіки усіх таких функцій *f*(*x*), що визначені на множині дійсних чисел, які для довільних дійсних *x*, *y* задовольняють рівність: $f(xy) = xf(y) + 2020f(x) + 2019$.

Слід побудувати графік функції $f(x) = \frac{1}{2020}x - 1$.

Спочатку слід розв'язати задане функціональне рівняння.

При *x* =0 маємо *f*(0)=-1.

При *y*=0 маємо $f(0) = xf(0) + 2020f(x) + 2019$.

Звідки $f(x) = \frac{1}{2020}x - 1$.

Перевіркою переконуємось, що ця функція задовольняє умову.

Відповідь: $f(x) = \frac{1}{2020}x - 1$.