Міністерство освіти і науки України
Департамент освіти і науки Сумської обласної державної адміністрації
Сумський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти

ІІІ ТА IV ЕТАПИ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ УЧНІВСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ У 2014-2015 Н.Р.

Інформаційно-аналітичний бюлетень

Суми – 2015

Рекомендовано до друку рішенням вченої ради Сумського обласного інституту
післядипломної педагогічної освіти
(Протокол № від)

Упорядник: Т.В. Свєтлова, методист математики Сумського ОІППО

Рецензенти: І.О. Захарова, кандидат педагогічних наук, доцент, декан факультету підвищення кваліфікації та перепідготовки Сумського ОІППО
І.В. Удовиченко, кандидат педагогічних наук, доцент,
проректор з науково-педагогічної роботи Сумського ОІППО

ІІІ та ІV етапи Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики у 2014-2015 н.р.: інформаційно-аналітичний бюлетень / Упор. Т.В. Свєтлова. – Суми: РВВ СОІППО, 2015. – 78 с.

Інформаційно-аналітичний бюлетень містить нормативні документи, умови організації та проведення, завдання, їх розв’язання, звітні аналітичні матеріали проведення ІІІ та ІV етапів Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики.

Бюлетень рекомендується методистам районних (міських) відділів (управлінь) освіти для використання в роботі як інформаційний матеріал та зразок оформлення відповідної документації, а також учителям математики – для підготовки учнів до ІІІ та ІV етапів олімпіади.

ЗМІСТ

Передмова……4
Нормативно-правове забезпечення Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики……..5
Умови проведення ІІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики……6
Оцінювання робіт учасників ІІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики……...8
Склад журі ІІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, 2014-2015 н.р……...9
Протоколи засідання журі ІІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики в Сумській області, 2014-2015 н.р ……11
Завдання ІІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, 2014-2015 н.р…….....20
Завдання IV етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, 2014-2015 н.р. …….....23
Розв'язання завдань ІІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, 2014-2015 н.р…….28
Розв'язання завдань IV етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, 2014-2015 н.р…….36
Звіт про проведення ІІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, 2014-2015 н.р……....57
Аналітичний звіт з проведення І, ІІ, ІІІ етапів Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики……..58
Список учнів-переможців ІІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, 2014-2015 н.р……..……...69
Список учителів, які підготували учнів-переможців ІІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, 2014-2015 н.р……....72
Заявка на участь команди Сумської області у IV етапі Всеукраїнської олімпіади з математики у 2015 році……74
IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики, 2014-2015 н.р……...76

ПЕРЕДМОВА

В умовах впровадження нових стандартів математичної освіти з особливою гостротою постає питання про спрямованість математичної освіти на розвиток інтелектуальних та творчих здібностей особистості людини, а це, у свою чергу, вимагає вдосконалення навчання математики у школі, що неможливо без підготовки вчителя математики до розвитку творчого мислення учнів, його спроможності здійснювати інноваційну педагогічну діяльність.

Інтелектуальні математичні змагання, зокрема Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики, як форма позакласної роботи в умовах сучасної школи, є дієвим засобом формування мотивації до навчання, підвищення пізнавальної активності, поглиблення і розширення знань з математики, підтримки і стимулювання творчо обдарованої учнівської молоді, створення умов для збереження й розвитку інтелектуального потенціалу України.

Метою проведення Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики є:

– стимулювання творчого самовдосконалення дітей, учнівської молоді;

– виявлення обдарованих учнів, сприяння розвитку творчих та інтелектуальних здібностей учнів;

– підвищення інтересу до поглибленого вивчення математики, формування навичок дослідницької роботи.

Проведення Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики сприяє залученню учнів до свідомої та цілеспрямованої пошукової діяльності з розв’язування нестандартних задач і вирішення проблемних ситуацій, привчає учнів до організованості, виховує волю до перемоги, наполегливість, самостійність, відповідальність.

Проведення Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики дає можливість проаналізувати ефективність системи роботи з обдарованою учнівською молоддю та визначити шляхи її удосконалення.

Розвиток індивідуальних здібностей та обдарованості дітей, забезпечення умов їхньої самореалізації є одним із завдань кожного вчителя математики.

НОРМАТИВНО-ПРАВОВЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ УЧНІВСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ

Порядок організації та проведення Всеукраїнських учнівських олімпіад, їх організаційне, методичне та фінансове забезпечення, порядок участі й визначення переможців визначає Положення про Всеукраїнські учнівські олімпіади, турніри, конкурси з навчальних предметів, конкурси-захисти науково-дослідницьких робіт, олімпіади зі спеціальних дисциплін та конкурси фахової майстерності.

Процес організації та проведення Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2014-2015 н.р. побудовано відповідно до нормативних документів:

1. Про затвердження Положення про Всеукраїнські учнівські олімпіади, турніри, конкурси з навчальних предметів, конкурси-захисти науково-дослідницьких робіт, олімпіади зі спеціальних дисциплін та конкурси фахової майстерності (наказ Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України від 22.09.2011 р. № 1099). Зареєстровано в Міністерстві юстиції України від 17 листопада 2011 року за № 1318/20056.

2. Про проведення Всеукраїнських учнівських олімпіад і турнірів з навчальних предметів у 2014/2015 навчальному році (наказ Міністерства освіти і науки України від 08.08.2014 № 918).

3. Про проведення ІІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики (лист Інституту інноваційних технологій і змісту освіти від 24.11.2014 № 14.1/10-3758).

4. Про проведення ІІІ етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад та участь команд учнів Сумської області в IV етапі Всеукраїнських учнівських олімпіад у 2013-2014 навчальному році (наказ управління освіти і науки Сумської обласної державної адміністрації від 14.11.2014 № 566-ОД).

5. Про проведення IV етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад з навчальних предметів у 2014/2015 навчальному році (наказ Міністерства освіти і науки України від 06.03.2015 № 248).

6. Про участь учнів у IV етапі Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики (наказ Департаменту освіти і науки Сумської обласної державної адміністрації від 14.03.2015 № 166-ОД).

УМОВИ ПРОВЕДЕННЯ ІІІ ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ УЧНІВСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ

У ІІІ етапі Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики беруть участь учні 7-11 класів, що стали переможцями ІІ етапу, згідно з квотою районів (міст). За бажанням учасник має право, на загальних умовах, брати участь у змаганнях серед учнів старших класів (порівняно з класом навчання).

Перед початком олімпіади проводиться інструктаж щодо порядку та умов її проведення (оформлення роботи, термін виконання, правила поведінки під час олімпіади).

Під час виконання завдань забороняється спілкування між учасниками олімпіади, не дозволяється користуватися довідковою літературою, таблицями, калькуляторами та іншими обчислювальними засобами (мобільним телефоном, цифровими пристроями). Під час виконання завдань учні повинні сидіти за партами по одному. Під час виконання завдань кожен учасник олімпіади має право вийти з класу після повернення учня, який виходив раніше, при цьому робота, на якій зазначається час відсутності, залишається в класі. Категорично забороняється і в цей час користуватися мобільними телефонами та іншими засобами зв’язку.

Для виконання завдань кожен учень на початок олімпіади повинен мати: ручку, олівець, лінійку, гумку, циркуль. Порядок виконання завдань учень може обирати самостійно. Завдання записується за тим номером, за яким воно вказано. Писати можна тільки ручкою, розбірливо, акуратно, без виправлень. Внесення позначок, що можуть сприяти дешифровці роботи, не дозволяється.

Учасники олімпіади повинні мати змогу ставити запитання щодо умов задач. Бажано надавати цю можливість лише протягом першої години проведення олімпіади. Запитання, що їх ставить учасник, повинні передбачати відповідь «Так» або «Ні».

У випадках, коли запитання сформульоване так, що на нього не можна відповісти «Так» або «Ні»: відповідь на запитання учасника міститься у явному вигляді в умові задачі; запитання стосується розв’язку задачі; відповідь на запитання вимагає обчислень, що можуть бути проведені учасником самостійно, виходячи з умов задачі та загальних знань – член журі повинен відповідати: «Не коментую».

Час виконання роботи в 7 класі – 3 астрономічні години, у 8-11 класах – 4 астрономічні години.

Комплект олімпіадних завдань складається з урахуванням шкільної програми (за принципом «накопичення підсумку»), включає як задачі, пов’язані

з розділами шкільного курсу математики поточного навчального року, так і задачі, що відображають вивчений раніше матеріал.

Учасники ІІІ етапу олімпіади повинні володіти не тільки методами, безпосередньо передбаченими навчальними програмами, але й спеціальними прийомами розв'язування олімпіадних задач (для відповідних вікових груп), додатковими теоретичними знаннями, передбаченими програмами факультативних курсів, математичних гуртків, усталеною практикою проведення в Україні математичних олімпіад тощо.

Комплект олімпіадних завдань дозволяє учням проявити не тільки знання методів та навички розв'язування задач суто олімпіадного характеру, але й впевнене володіння методами розв'язування задач підвищеної складності, безпосередньо пов'язаних зі змістом шкільної програми (нестандартні рівняння, системи рівнянь, нерівності, побудова графіків функцій, зображення на координатній площині множин, визначених певними умовами, тригонометричні задачі тощо).

Зміст, обсяг та рівень складності олімпіадних завдань забезпечує учням можливість якнайповніше розкрити свої здібності. Реалізовуються основні тематичні «лінії» програми загальноосвітніх навчальних закладів, програми для шкіл (класів) з поглибленим вивченням математики.

До олімпіадних завдань відповідних вікових груп включаються задачі комбінаторно-логічного змісту (клітчасті дошки, таблиці, графи, допоміжні «розфарбування», числові набори, математичні ігри, принцип «крайнього елемента», інваріанти, напівінваріанти, принцип Діріхле), теоретико-числові задачі, задачі на доведення нерівностей, функціональних співвідношень та інші задачі на властивості функцій, задачі на властивості цілої та дробової частини числа, різнопланові геометричні задачі (для 11 класів, у залежності від структури завдання, олімпіадні стереометричні задачі з вивченого на момент проведення олімпіади матеріалу).

Комплект завдань для 7 класу складається з 5 завдань, для 8-10 класів – 6 завдань, для 11 класу – 7 завдань.

Максимальна оцінка за виконання одного завдання – 7 балів. Максимально можлива кількість набраних балів у 7 класі – 35 балів, у 8-10 класах – 42 бали, в 11 класі – 49 балів.

ОЦІНЮВАННЯ РОБІТ УЧАСНИКІВ ІІІ ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ УЧНІВСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ

Для здійснення якісної неупередженої перевірки завдань розроблено єдині критерії оцінювання до кожної задачі з урахуванням різних способів розв'язання завдань учасниками олімпіади. У критеріях оцінювання відображені всі кроки (просування) розв'язування кожної задачі. Максимальна кількість балів, яку може одержати учасник за виконання кожної конкретної задачі – 7 балів.

Критерії оцінювання завдань

Бали	Критерії оцінювання
7	Завдання розв'язано правильно, супроводжується докладними поясненнями, містить необхідні обґрунтування
6	Відповідь вказано правильну, обґрунтування містить деякі недоліки: правильні, але недостатньо обґрунтовані логічні кроки, які легко обґрунтовуються; помилки обчислювального характеру, що не призводять до порушення логіки виконання
5	Завдання в основному розв'язано, але допущена механічна помилка, яка не вплинула корінним чином на відповідь, чи наявний інший недолік, який легко усунути
4	Чітко виражена не менше як половина розв'язання завдання, або наявний рівносильний їй частковий випадок, або із двох складових завдання розв'язано складніше
3	Відповідь вказано правильну, але відсутнє обґрунтування основних етапів, або із двох складових завдання розв'язано простіше
2	Запропонована ідея розв'язання, зроблено деякі кроки в її реалізації, або розглянуто деякий нетривіальний частковий випадок
1	Виражена ідея розв'язання чи записана правильна відповідь при обов'язковій наявності спроб, можливо, й невдалих
0	Завдання розв'язано цілком неправильно, або записано лише готову відповідь, одержання якої не є очевидним, або завдання не розв'язувалося взагалі

Розв'язання завдань учасником оцінюється лише цілою кількістю балів. Під час оцінювання олімпіадних робіт не враховується раціональність або нераціональність розв'язань. Знаходження декількох способів правильного виконання одного завдання не призводить до збільшення максимальної кількості балів (7 балів) за виконання даного завдання.

Журі перевіряє тільки завдання, що записані у чистовик учасника олімпіади. Чернетка членами журі не розглядається.

Як виключення, журі може звернутися до чернетки, де розглянуто окремі випадки або проведено доведення якогось твердження, а у чистовику явно вказано посилання на чернетку.

СКЛАД ЖУРІ ІІІ ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ УЧНІВСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ, 2014-2015 Н.Р.

Голова журі – Чашечникова Ольга Серафимівна, професор кафедри математики Сумського державного педагогічного університету ім. А.С. Макаренка, доктор педагогічних наук.

Заступник голови журі – Назаренко Олександр Максимович, доцент кафедри моделювання складних систем Сумського державного університету, кандидат фізико-математичних наук.

Експерт-консультант – Ніколаєва Катерина Володимирівна, доцент кафедри методики початкової та природничо-математичної освіти Сумського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти, кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Секретар – Свєтлова Тетяна Володимирівна, методист математики Сумського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти.

Члени журі

1. Азаренкова Альона Іванівна, учитель математики вищої категорії Сумської спеціалізованої школи І-ІІІ ступенів № 10 ім. О. Бутка м. Суми, учитель-методист, Заслужений учитель України.

2. Бур Олена Василівна, учитель математики вищої категорії Шосткинського навчально-виховного комплексу: спеціалізована школа І-ІІ ступенів – ліцей Шосткинської міської ради Сумської області, учитель-методист, Заслужений учитель України.

3. Жученко Тетяна Миколаївна, учитель математики вищої категорії Косівщинської загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів ім. Лесі Українки Сумської районної ради Сумської області.

4. Клименко Володимир Андрійович, старший викладач кафедри математичного аналізу і методів оптимізації Сумського державного університету.

5. Кудлай Антоніна Борисівна, учитель математики вищої категорії Лебединської загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів № 6 Лебединської міської ради Сумської області, учитель-методист.

6. Мартиненко Олена Вікторівна, доцент кафедри математики Сумського державного педагогічного університету ім. А.С. Макаренка, кандидат фізико-математичних наук.

7. Маслов Олександр Петрович, доцент кафедри математичного аналізу і методів оптимізації Сумського державного університету, кандидат технічних наук.

8. Одінцова Оксана Олександрівна, доцент кафедри математики Сумського державного педагогічного університету ім. А.С. Макаренка, кандидат фізико-математичних наук.

9. Панченко Тетяна Іванівна, учитель математики вищої категорії Олександрівської гімназії Сумської міської ради, учитель-методист.

10. Передрій Жанна Миколаївна, учитель математики вищої категорії Шосткинського навчально-виховного комплексу: спеціалізована школа I-II ступенів – ліцей Шосткинської міської ради Сумської області, учитель-методист.

11. Погребний Валерій Данилович, доцент кафедри математики Сумського державного педагогічного університету ім. А.С. Макаренка, кандидат фізико-математичних наук.

12. Селіваненко Людмила Миколаївна, учитель математики вищої категорії, старший учитель обласної гімназії-інтернату для талановитих та творчо обдарованих дітей Сумської обласної ради.

13. Страх Олександр Петрович, викладач кафедри математики Сумського державного педагогічного університету ім. А.С. Макаренка.

14. Шаповалов Сергій Павлович, доцент кафедри комп’ютерних наук Сумського державного університету, кандидат фізико-математичних наук.

ПРОТОКОЛИ ЗАСІДАННЯ ЖУРІ ІІІ ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ УЧНІВСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ, 2014-2015 Н.Р.

7 КЛАС

№ з/п	Прізвище, ім'я по батькові	Число, місяць, рік народження	Назва закладу освіти	Кіль-кість балів	Міс-це
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	Ібрагімова Сабіна Ельшанівна	12 січня 2002 року	Ворожбянська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 3 Білопільської районної ради	23	**I**
2	Майданевич Євгеній Андрійович	18 червня 2002 року	Буринська спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 1 Буринської міської ради	2	**9**
3	Гончаренко Дмитро Миколайович	24 березня 2002 року	Дубов'язівський НВК: спеціалізована школа І-ІІІ ступенів – дошкільний навчальний заклад Конотопської районної ради	12	**III**
4	Грубий Владислав Андрійович	4 січня 2002 року	Покровська загальноосвітня школа І-ІІ ступенів Краснопільської районної ради	9	**4**
5	Кравченко Дмитро Валерійович	3 грудня 2001 року	Кролевецька спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 3 Кролевецької районної ради	16	**II**
6	Гриценко Дарина Олександрівна	24 березня 2002 року	Червленівський НВК: загальноосвітня школа І-ІІ ступенів – дошкільний навчальний заклад Лебединської районної ради	1	**10**
7	Троценко Дмитро Сергійович	27 лютого 2002 року	Підставська загальноосвітня школа І-ІІ ступенів Липоводолинської районної ради	7	**6**
8	Гусєва Анастасія Ярославівна	13 листопада 2001 року	Путивльська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 2 імені Г.Я. Базими Путивльської районної ради	9	**4**
9	Хоменко Аліна Володимирівна	23 листопада 2001 року	Низівська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів Сумської районної ради	3	**8**
10	Тхор Антон Анатолійович	26 березня 2001 року	Конотопська гімназія Конотопської міської ради	7	**6**
11	Дмитриченко Катерина Олексіївна	7 грудня 2001 року	Тростянецька спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 5 Тростянецької районної ради	5	**7**

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
12	Трофименков Олександр Володимирович	5 листопада 2001 року	Рожковицький НВК: загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів – дошкільний навчальний заклад Середино-Будської районної ради	12	**III**
13	Буренков Олег Сергійович	9 листопада 2001 року	Сумська спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 10 ім. Героя Радянського Союзу О. Бутка	12	**III**
14	Прощенко Вадим Сергійович	26 січня 2002 року	Сумська спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 10 ім. Героя Радянського Союзу О. Бутка	20	**II**
15	Москаленко Анна Олександрівна	26 лютого 2002 року	Глухівська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 2 Глухівської міської ради	2	**9**
16	Павловська Марія Олександрівна	14 серпня 2002 року	Конотопська гімназія Конотопської міської ради	8	**5**
17	Непочтов Валентин Олексійович	28 березня 2002 року	Лебединська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 1 Лебединської міської ради	13	**III**
18	Альошкіна Тетяна Олексіївна	19 жовтня 2001 року	Охтирська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 2 Охтирської міської ради	12	**III**
19	Доля Ніна Юріївна	6 лютого 2002 року	Роменська спеціалізована загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 1 ім. П.І. Калнишевського Роменської міської ради	5	**7**
	Єрьоменко Анна Олексіївна	24 квітня 2002 року	Шосткинський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа І-ІІ ступенів-ліцей Шосткинської міської ради	12	**III**
20	Гриценко Роман Олександрович	21 листопада 2001 року	Шосткинський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа І-ІІ ступенів-ліцей Шосткинської міської ради	16	**II**

Голова журі: О.С. Чашечникова
Члени журі: О.В. Мартиненко
Л.М. Селіваненко

Секретар журі: Т.В. Свєтлова
Експерт-консультант: К.В. Ніколаєва

Підписи наявні в оригіналі

8 КЛАС

№ з/п	Прізвище, ім'я по батькові	Число, місяць, рік народження	Назва закладу освіти	Кіль-кість балів	Міс-це
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	Бондаренко Анастасія Олександрівна	10 вересня 2001 року	Буринська спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 2 Буринської міської ради	1	**12**
2	Коваленко Тетяна Володимирівна	6 грудня 2000 року	Кролевецька спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 3 Кролевецької районної ради	22	**III**
3	Фрол Валентина Вікторівна	13 травня 2001 року	Межиріцька загальноосвітня школаІ-ІІІ ступенів Лебединської районної ради	11	**7**
4	Скоромний Валентин Андрійович	20 травня 2001 року	Хмелівський навчально-виховний комплекс: загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів – дошкільний навчальний заклад імені І.Ф.Федька Роменської районної ради	6	**9**
5	Вавіла Олександра Миколаївна	22 серпня 2001 року	Середино-Будська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 2 Середино-Будської районної ради	28	**III**
6	Куратченко Анна Андріївна	16 липня 2001 року	Низівська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів Сумської районної ради	8	**8**
7	Батраченко Владислав Олександрович	11 листопада 2000 року	Тростянецька спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 5 Тростянецької районної ради	22	**III**
8	Сітало Максим Євгенійович	19 серпня 2001 року	Сумська спеціалізована школа І-ІІІ ступенів №17	36	**I**
9	Супрун Юлія Олександрівна	2 серпня 2001 року	Сумська спеціалізована школа І-ІІІ ступенів №10 ім. Героя Радянського Союзу О. Бутка	31	**II**
10	Романюк Анна Євгеніївна	7 серпня 2001 року	Конотопська гімназія Конотопської міської ради	31	**II**
11	Поляков Самір Федорович	10 березня 2001 року	Лебединська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 6 Лебединської міської ради	16	**4**

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
12	Бруньова Зоя Олександрівна	4 липня 2001 року	Лебединська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 1 Лебединської міської ради	12	**6**
13	Гавриш Аліна Романівна	29 травня 2001 року	Охтирська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 1 Охтирської міської ради	4	**10**
14	Чайка Андрій Анатолійович	16 січня 2000 року	Шосткинський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа І-ІІ ступенів – ліцей Шосткинської міської ради	29	**ІІІ**
15	Романько Ярослав Сергійович	5 грудня 2000 року	Шосткинський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа І-ІІ ступенів – ліцей Шосткинської міської ради	28	**ІІІ**
16	Кононенко Олександр Миколайович	19 липня 2001 року	Сумська обласна гімназія-інтернат для талановитих та творчо обдарованих дітей Сумської обласної ради	3	**11**
17	Наріжний Артем Сергійович	26 червня 2001 року	Державний ліцей-інтернат з посиленою військово-фізичною підготовкою «Кадетський корпус» імені І.Г. Харитоненка	13	**5**
18	Тєлєтов Дмитро Олександрович	24 липня 2001 року	Олександрівська гімназія Сумської міської ради	21	**ІІІ**

Голова журі: О.С. Чашечникова
Члени журі: О.П. Маслов
Т.М. Жученко
А.І. Азаренкова
Секретар журі: Т.В. Свєтлова
Експерт-консультант: К.В. Ніколаєва

Підписи наявні в оригіналі

9 КЛАС

№ з/п	Прізвище, ім'я по батькові	Число, місяць, рік народження	Назва закладу освіти	Кіль-кість балів	Міс-це
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	Панасовський Максим Павлович	10 червня 2000 року	Улянівський навчально-виховний комплекс: загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів – дошкільний навчальний заклад Білопільської районної ради	7	**10**
2	Курінський Вадим Юрійович	20 вересня 2000 року	Великосамбірський навчально-виховний комплекс: загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів – дошкільний навчальний заклад Конотопської районної ради	21	**III**
3	Мороз Ангеліна Сергіївна	25 червня 2000 року	Кролевецька спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 1 Кролевецької районної ради	29	**II**
4	Ковтун Ангеліна Олександрівна	19 листопада 1999 року	Малопавлівська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів Охтирської районної ради	5	**12**
5	Курченко Юрій Анатолійович	9 грудня 1999 року	Путивльська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 1 імені Радіка Руднєва Путивльської районної ради	13	**7**
6	Довбня Артем Анатолійович	12 листопада 1999 року	Рогинська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів Роменської районної ради	18	**5**
7	Мерцалов Олексій Олександрович	14 лютого 2001 року	Середино-Будська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 1 Середино-Будської районної ради	19	**4**
8	Башлай Альона Олександрівна	15 травня 2000 року	Садівська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів Сумської районної ради	17	**6**
9	Кочетков Денис Олександрович	21 липня 2000 року	Олександрівська гімназія Сумської міської ради	39	**I**
10	Грицина Андрій Сергійович	23 березня 2000 року	Сумська гімназія №1, м. Суми Сумської області	24	**III**

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
11	Гурова Юлія Володимирівна	16 грудня 1999 року	Олександрівська гімназія Сумської міської ради	26	**III**
12	Танасюк Алла Вікторівна	5 березня 2000 року	Сумська спеціалізована школа І-ІІІ ступенів №10 ім. Героя Радянського Союзу О. Бутка	25	**III**
13	Соловей Дар'я Іванівна	21 серпня 2000 року	Конотопська гімназія Конотопської міської ради	32	**II**
14	Коренев Владислав Олександрович	1 листопада 2000 року	Конотопська спеціалізована школа І-ІІІ ступенів №12 Конотопської міської ради	8	**9**
15	Каплун Владислав Миколайович	29 вересня 1999 року	Роменська загальноосвітня школа І-ІІ ступенів № 8 Роменської міської ради	6	**11**
16	Заяц Катерина Валентинівна	25 жовтня 1999 року	Шосткинський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа І-ІІ ступенів – ліцей Шосткинської міської ради	23	**III**
17	Ілляшенко Ярослав Михайлович	14 грудня 1999 року	Шосткинський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа І-ІІ ступенів – ліцей Шосткинської міської ради	19	**4**
18	Дудар Денис Петрович	11 грудня 1999 року	Шосткинський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа І-ІІ ступенів – ліцей Шосткинської міської ради	28	**II**
19	Лебідь Павло Володимирович	12 липня 2000 року	Сумська обласна гімназія-інтернат для талановитих та творчо обдарованих дітей Сумської обласної ради	9	**8**
20	Маринченко Данило Дмитрович	15 червня 2000 року	Державний ліцей-інтернат з посиленою військово-фізичною підготовкою «Кадетський корпус» імені І.Г. Харитоненка	23	**III**

Голова журі: О.С. Чашечникова
Члени журі: О.О.Одінцова
О.П. Страх
А.Б. Кудлай
Секретар журі: Т.В. Свєтлова
Експерт-консультант: К.В. Ніколаєва

Підписи наявні в оригіналі

10 КЛАС

№ з/п	Прізвище, ім'я по батькові	Число, місяць, рік народження	Назва закладу освіти	Кіль-кість балів	Міс-це
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	Курсенко Дмитро Станіславович	29 липня 1999 року	Заводська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів Велико-писарівської районної ради	8	**8**
2	Мінаков Іван Сергійович	24 грудня 1998 року	Уланівський навчально-виховний комплекс: загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів, дошкільний навчальний заклад «Джерельце» Глухівської районної ради	10	**7**
3	Свинарчук Максим Владиславович	27 листопада 1998 року	Кролевецька спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 3 Кролевецької районної ради	17	**III**
4	Шевченко Богдан Миколайович	5 березня 1999 року	Липоводолинська спеціалізова-на школа І-ІІІ ступенів Липово-долинської районної ради	15	**III**
5	Гвоздецька Альона Олексіївна	14 грудня 1998 року	Рогинська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів Роменської районної ради	3	**10**
6	Красніков Андрій Сергійович	17 січня 1999 року	Тростянецька спеціалізована школа І-ІІІ ступенів №3 Тростянецької районної ради	17	**III**
7	Кролевецький Денис Юрійович	20 жовтня 1998 року	Сумська спеціалізована школа І-ІІІ ступенів №10 ім. Героя Радянського Союзу О. Бутка	27	**I**
8	Рожнов Олександр Ігорович	19 березня 1998 року	Глухівська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 3 Глухівської міської ради	11	**6**
9	Бабко Дмитро Сергійович	12 квітня 1999 року	Конотопська спеціалізована школа І-ІІІ ступенів №12 Конотопської міської ради	20	**III**
10	Долгополов Олександр Олександрович	21 червня 1998 року	Конотопська спеціалізована школа І-ІІІ ступенів №12 Конотопської міської ради	13	**4**
11	Похваленна Ольга Олександрівна	17 березня 1999 року	Сумська гімназія №1 м. Суми	12	**5**
12	Єременко Іван Сергійович	7 березня 1999 року	Сумська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 27	25	**II**

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
13	Гаврилюк Катерина Миколаївна	23 липня 1999 року	Конотопська гімназія Конотопської міської ради	15	**III**
14	Мірошніченко Владислав Мирославович	19 травня 1999 року	Охтирська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 1 Охтирської міської ради	6	**9**
15	Колпак Максим Віталійович	9 жовтня 1998 року	Роменська спеціалізована загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 1 ім. П.І. Калнишевського Роменської міської ради	13	**4**
16	Логвіна Ангеліна Вікторівна	10 листопада 1998 року	Шосткинський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа І-ІІ ступенів – ліцей Шосткинської міської ради	22	**III**
17	Гасс Леонід Едуардович	12 листопада 1998 року	Шосткинський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа І-ІІ ступенів – ліцей Шосткинської міської ради	25	**II**
18	Басанець Євгеній Олександрович	25 квітня 1998 року	Шосткинський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа І-ІІ ступенів – ліцей Шосткинської міської ради	15	**III**
19	Успенський Максим Олександрович	1 квітня 1999 року	Сумська обласна гімназія-інтернат для талановитих та творчо обдарованих дітей Сумської обласної ради	11	**6**
20	Ленда Павло Романович	18 квітня 1998 року	Державний ліцей-інтернат з посиленою військово-фізичною підготовкою «Кадетський корпус» імені І.Г.Харитоненка	10	**7**
21	Максимчук Артем Володимирович	25 листопада 1996 року	Державний професійно-технічний навчальний заклад «Сумський центр професійно-технічної освіти»	3	**10**

Голова журі: О.С. Чашечникова
Члени журі: С.П. Шаповалов
В.А. Клименко
Т.І. Панченко
Секретар журі: Т.В. Свєтлова
Експерт-консультант: К.В. Ніколаєва

Підписи наявні в оригіналі

11 КЛАС

№ з/п	Прізвище, ім'я по батькові	Число, місяць, рік народження	Назва закладу освіти	Кіль-кість балів	Міс-це
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	Манжула Богдана Павлівна	16 грудня 1997 року	Краснопільська гімназія Краснопільської районної ради	3	**8**
2	Ростальна Руслана Олександрівна	28 вересня 1998 року	Кролевецька спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 3 Кролевецької районної ради	5	**6**
3	Міняйло Аліна Сергіївна	22 січня 1998 року	Беївська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів Липоводолинської районної ради	20	**II**
4	Гончар Максим Анатолійович	30 жовтня 1997 року	Воронізька загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів ім. П.О.Куліша Шосткинської районної ради	7	**4**
5	Копатько Євген Вікторович	13 вересня 1997 року	Воронізька загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів ім. П.О.Куліша Шосткинської районної ради	4	**7**
6	Фірстенко Валерій Миколайович	28 лютого 1998 року	Олександрівська гімназія Сумської міської ради	21	**II**
7	Боряк Олександр Валерійович	6 грудня 1997 року	Олександрівська гімназія Сумської міської ради	16	**III**
8	Дуркіна Анастасія Ігорівна	3 лютого 1998 року	Сумська гімназія № 1 Сумської міської ради	6	**5**
9	Лантух Андрій Миколайович	9 грудня 1997 року	Конотопська гімназія Конотопської міської ради	16	**III**
10	Московець Наталія Сергіївна	10 вересня 1998 року	Роменська спеціалізована загально-освітня школа І-ІІІ ступенів № 2 ім. акад. А.Ф.Йоффе Роменської міської ради	30	**I**
11	Бенхенні Карім Ларбі	15 березня 1998 року	Сумська обласна гімназія-інтернат для талановитих та творчо обдаро-ваних дітей Сумської обласної ради	18	**III**
12	Ігнатьєв Ігор Валерійович	14 вересня 1997 року	Державний ліцей-інтернат з посиленою військово-фізичною підготовкою «Кадетський корпус» імені І.Г. Харитоненка	3	**8**

Голова журі: О.С. Чашечникова
Заступник голови журі О.М. Назаренко
Члени журі: В.Д. Погребний
О.В. Бур
Ж.М. Передрій
Секретар журі: Т.В. Свєтлова
Експерт-консультант: .В. Ніколаєва

Підписи наявні в оригіналі

ЗАВДАННЯ ІІІ ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ УЧНІВСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ, 2014-2015 Н.Р.

7 КЛАС

1. З'ясуйте, чи ділиться число $1+2+2^2+2^3+...+2^{2014}+2^{2015}$ на 3? Відповідь обґрунтуйте.

2. Не дочекавшись трамваю на зупинці А, хлопчик пішов до наступної зупинки В. Пройшовши $\frac{1}{3}$ шляху, він озирнувся і помітив, що до зупинки А наближається трамвай. Якщо хлопчик у цей момент побіжить до зупинки А або до зупинки В, то він прибіжить до кожної з них одночасно з приходом туди трамваю. Визначити швидкість бігу хлопчика, вважаючи її сталою (часом перебування трамваю на зупинці А знехтувати), якщо швидкість трамваю дорівнює 30 км/год.

3. У класі не більше 40 учнів. Зріст кожного з них виражається цілим числом сантиметрів. Середній зріст усіх учнів, окрім найвищого, дорівнює $148\frac{3}{4}$ см, а середній зріст усіх учнів цього класу, окрім найнижчого, дорівнює $149\frac{4}{7}$ см. З'ясуйте, скільки всього учнів у класі? Відповідь обґрунтуйте.

4. У квадраті $ABCD$ на сторонах AD та DC вибрані точки M та N відповідно таким чином, що $\angle BMA = \angle NMD = 60°$. Знайдіть величину кута MBN.

5. Таблицю 5×5 заповнили натуральними числами $1, 2, ..., 25$ таким чином, що кожне число зустрічається в таблиці рівно один раз і кожні два послідовні числа містяться у сусідніх (таких, що мають спільну сторону) клітинках. З'ясуйте, яка максимальна кількість простих чисел могла опинитися в одному стовпчику таблиці? У відповіді наведіть приклад заповнення таблиці, для якого таке найбільше значення досягається.

8 КЛАС

1. З'ясуйте, якою цифрою закінчується різниця:
$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2014\cdot 2015 - 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot 2013\cdot 2015$?

2. Дано числа 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016. Дозволено до будь-яких двох з них додати по одиниці. З'ясуйте, чи можна за кілька кроків зрівняти ці числа?

3. У класі не більше 40 учнів. Зріст кожного з них виражається цілим числом сантиметрів. Середній зріст усіх учнів цього класу, окрім найвищого, дорівнює $148\frac{3}{4}$ см, а середній зріст усіх учнів, окрім найнижчого, дорівнює

$149\frac{4}{7}$ см. З'ясуйте, на скільки сантиметрів найвищий учень вище найнижчого? Відповідь обґрунтуйте.

4. На стороні *AB* трикутника *ABC* відмітили точки C_1 і C_2, а на стороні *CB* відмітили точки A_1 і A_2 таким чином, що AA_1 – бісектриса кута CAA_2, AA_2 – бісектриса кута BAA_1, CC_1 – бісектриса кута ACC_2, CC_2 – бісектриса кута BCC_1. *D* – точка перетину AA_1 і CC_1, *E* – точка перетину AA_2 і CC_2. Пряма *ED* перпендикулярна до прямої *AC*. Доведіть, що *AB=BC*.

5. На дошці розміром 4×4 грають двоє. Ходять по черзі, і кожний гравець своїм ходом зафарбовує одну клітинку. Кожну клітинку зафарбовувати можна лише один раз. Програє той гравець, після ходу якого утвориться квадрат 2×2, що складається із зафарбованих клітинок. З'ясуйте, хто з гравців може забезпечити собі виграш – той, хто ходить першим, чи його суперник? Відповідь обґрунтуйте.

6. Побудуйте на координатній площині множину точок (*x,y*), координати яких задовольняють рівність $x^2 + y^2 = 2(|x| + |y|)$. Обчисліть площу фігури, яку обмежують ці точки.

9 КЛАС

1. Обчисліть значення виразу: $\frac{(2005 \cdot 2025 + 100) \cdot (1995 \cdot 2035 + 400)}{2015^4}$.

2. Середній зріст усіх учнів деякого класу дорівнює 150 см. Середній зріст усіх хлопчиків класу дорівнює 155 см, середній зріст усіх дівчаток класу дорівнює 148 см. З'ясуйте, у скільки разів кількість дівчаток класу більша кількості хлопчиків? Відповідь обґрунтуйте.

3. Сума трьох різних чисел дорівнює 6, а сума їх попарних добутків дорівнює 9. Доведіть, що ці числа додатні.

4. На стороні *AB* квадрата *ABCD* вибрали таку точку *P*, що *AP=PB*. Нехай *E* – основа перпендикуляра, проведеного з точки *C* до прямої *DP*. Знайдіть величину кута *AEP*.

5. Натуральні числа від 1 до 9 розфарбовано у два кольори. Доведіть, що знайдуться три різні числа одного кольору, одне з яких дорівнює сумі двох інших.

6. Побудуйте множину всіх точок декартової площини, для координат яких виконується рівність

$$\left[3\left\{\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{3}\right\}\right] = 1,$$

де $[a]$ – ціла частина, $\{a\}$ – дробова частина числа a.

10 КЛАС

1. З'ясуйте, яке з чисел більше: $\sqrt[3]{2013}+\sqrt[3]{2015}$ чи $2\sqrt[3]{2014}$? Відповідь обґрунтуйте.

2. У класі 28 учнів. Середній зріст усіх учнів класу дорівнює 150 см. Середній зріст усіх хлопчиків класу дорівнює 155 см, середній зріст усіх дівчаток класу дорівнює 148 см. З'ясуйте, скільки дівчаток у цьому класу? Відповідь обґрунтуйте.

3. Доведіть нерівність $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}>\frac{1}{2}$

4. Точку O, що лежить усередині правильного $2n$-кутника з'єднано з його вершинами. Одержані трикутники розфарбовано через один червоним і синім кольором. Доведіть, що сума площ червоних трикутників дорівнює сумі площ синіх трикутників.

5. $ABCD$ – чотирикутник, вписаний в коло, причому $\angle BAC=\angle DAC$. Доведіть, що площа чотирикутника $ABCD$ не перевищує $\frac{1}{2}AC^2$.

6. Побудуйте множину точок координатної площини, координати яких є задовольняють рівність $|y|=\sqrt{\{x\}-\{x\}^2}$, де $\{a\}$ – дробова частина числа a.

11 КЛАС

1. Побудуйте графік функції $y=\frac{2014}{cos^2(arctg(x-\pi))}-2015.$

2. У класі не більше, ніж 40 учнів. Зріст кожного з них виражається цілим числом сантиметрів. Середній зріст усіх учнів цього класу, окрім найвищого, дорівнює $148\frac{3}{4}$ см. Середній зріст усіх учнів цього класу, окрім найнижчого, дорівнює $149\frac{4}{7}$ см. Середній зріст усіх учнів класу дорівнює 149 см. Знайдіть середній зріст усіх учнів класу, крім двох учнів – найвищого та найнижчого. Відповідь обґрунтуйте.

3. Доведіть нерівність $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}>\frac{1}{2}$.

4. Кожна з точок площини пофарбована в один з трьох кольорів. Доведіть, що знайдуться дві точки, пофарбовані в один колір, відстань між якими дорівнює 1.

5. $ABCD$ – чотирикутник, вписаний в коло, причому $\angle BAC=\angle DAC$. Доведіть, що площа чотирикутника $ABCD$ не перевищує $\frac{1}{2}AC^2$.

6. Побудуйте множину точок координатної площини, координати яких є задовольняють рівність $|y|=\sqrt{\{x\}-\{x\}^2}$, де $\{a\}$ – дробова частина числа a.

ЗАВДАННЯ IV ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ УЧНІВСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ, 2014-2015 Н.Р.

8 КЛАС

Перший день

1. Знайдіть усі цілі числа n, які задовольняють рівність:

$$(n-2013)(n-2014)(n-2016)(n-2017)=4.$$

(Рубльов Богдан)

2. У Насті є 5 жовтих монет, про які їй відомо, що вони справжні. В неї є також 5 синіх монет, про які їй відомо, що серед них 3 справжні та дві фальшиві. Усі 8 справжніх монет важать однаково, одна з фальшивих монет важча за справжню на 1 грам, а інша – легша за справжню також на 1 грам. Чи зможе Настя за допомогою шалькових терезів без гир за 3 зважування визначити обидві фальшиві монети та вказати, яка з них більш важка, а яка більш легка?

(Рубльов Богдан)

3. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{1}{\sqrt{2014}-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2015}-\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{2016}-\sqrt{x+2}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2015-x}-\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2016-x}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2017-x}-\sqrt{3}}.$$

(Рубльов Богдан)

4. Дана трапеція $ABCD$ з основами BC та AD. На діагоналях AC та BD відмічені точки P та Q відповідно так, що AC – бісектриса $\angle BPD$, а BD – бісектриса $\angle AQC$. Доведіть, що $\angle BPD=\angle AQC$.

(Сердюк Назар)

Другий день

5. Відомо, що для чисел a,b,c справджується умова: середнє арифметичне чисел a,b дорівнює числу c, тобто $c=\frac{1}{2}(a+b)$, а середнє гармонічне чисел a,c дорівнює числу b, тобто $b=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}$. Чи обов'язково числа a,b,c рівні між собою?

(Рубльов Богдан)

6. У трапеції $ABCD$ з перпендикулярними діагоналями точки P,N,Q,M – середини сторін AB,BC,CD,DA відповідно. На основі CD існує точка L, яка відмінна від точки Q, для якої кут MLN – прямий. Знайдіть величину кута LPA.

(Рубльов Богдан)

7. Знайдіть усі такі трійки простих чисел (p,q,r), що задовольняють рівність

$$\frac{q}{p-1}+\frac{r}{p+1}=\frac{q+r+1}{p}.$$

(Ясінський В'ячеслав)

8. На колі розташовані N точок. Андрій та Олеся грають у таку гру. Першим ходить Андрій. Вони по черзі з'єднують дві із заданих точок хордою, якщо вона не перетинає жодну з раніше проведених хорд у внутрішній точці. Перемагає той, після ходу якого утвориться трикутник з проведених хорд. Хто перемагає при правильній грі обох суперників, якщо

а) $N=14$; *б)* $N=15$?

(Рубльов Богдан)

9 КЛАС

Перший день

1. Вартість одного кілограма шоколадних цукерок – x гривень, а кілограма картоплі – y гривень, причому числа x та y – натуральні та не більш ніж двоцифрові. Мати сказала Андрійкові купити 200 грамів цукерок та 1 кг картоплі, що мало коштувати рівно N гривень. Андрійко все переплутав і купив 200 грамів картоплі та 1 кг цукерок. Йому довелося сплатити рівно $M>N$ гривень. Виявилось, що двоцифрові числа N та M записуються одними й тими ж цифрами, але у різному порядку. Скільки коштує кілограм картоплі та кілограм цукерок?

(Рубльов Богдан)

2. У тенісному турнірі в одне коло взяли участь 8 дівчат (тобто кожна тенісистка зіграла з кожною іншою рівно 1 раз, нічиїх у тенісі не буває). Оксана посіла друге місце за набраними очками, і таку кількість очок не набрала більше жодна інша учасниця. Яку максимальну кількість ігор могла програти Олеся, яка перемогла в цьому турнірі?

(Рубльов Богдан)

3. Для додатних чисел a, b, c, що задовольняють умову $a+b+c+2=abc$, доведіть нерівність: $\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}\geq 2$.

(Митрофанов Вадим)

4. На стороні BC гострокутного трикутника ABC вибрано довільну точку D. Нехай O – центр описаного кола ΔABC, а Z – точка цього кола, що діаметрально протилежна точці A. Нехай X, Y такі точки на відрізках BO, CO відповідно, для яких виконується умова: $\angle BXD+\angle ABC=180^\circ=\angle CYD+\angle ACB$. Доведіть, що градусна міра $\angle XZY$ не залежить від вибору точки D.

(Хілько Данило)

Другий день

5. Відомо, що для чисел a, b, c справджується умова: середнє арифметичне чисел a, b дорівнює числу c, тобто $c=\frac{1}{2}(a+b)$, а середнє геометричне чисел a, c дорівнює числу b, тобто $b=\sqrt{ac}$. Чи обов'язково числа a, b, c рівні між собою?

(Рубльов Богдан)

6. У трикутнику ABC на сторонах BC та AB вибрано точки A_1 та C_1 відповідно такі, що $AA_1 = CC_1$. Відрізки AA_1 та CC_1 перетинаються в точці F. Виявилось, що $\angle CFA_1 = 2\angle ABC$. Доведіть, що $AA_1 = AC$.

(Гоголєв Андрій)

7. Знайдіть усі прості числа $p < q < r$ такі, що числа $A = (r-p)(r-q)(q-p)+1$ і $B = 3p+5q$ дорівнюють одному й тому самому простому числу.

(Ясінський В'ячеслав)

8. Є $2k+1$ людина, усі попарно різного зросту. Позначимо їх зріст у порядку зростання – він найнижчого до найвищого, таким чином: $a_1 < a_2 < ... < a_{2k+1}$. Після цього вишукуємо їх довільним чином у вигляді таблиці $M \times N$ (M – рядків та N стовпчиків). Тепер у кожному з M рядків вибираємо середнього за зростом. А далі з цих середніх за зростом M людей вибираємо середнього за зростом, якого назвемо середняк.

а) Який найменший зріст може мати середняк, якщо $2k+1 = 2015$?

б) Який найменший зріст може мати середняк для довільного k?

(Рубльов Богдан)

10 КЛАС

Перший день

1. Розв'яжіть рівняння: $ctg[x] \cdot ctg\{x\} = 1$.

$[a]$ – ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, що не перевищує a, а $\{a\}$ – дробова частина числа a, тобто $\{a\} = a - [a]$.

(Апостолова Галина)

2. Всередині правильного трикутника ABC вибрано точку M. Нехай точки M_1, M_2, M_3 симетричні їй відносно сторін BC, AC, AB трикутника відповідно. Доведіть, що сума векторів $\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2} + \overrightarrow{MM_3}$ дорівнює сумі векторів $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

(Терьошин Дмитро)

3. Натуральні числа a, p задовольняють умову: $p = 2^a - 1$. Знайдіть усі значення a, для яких число $\frac{1}{2}(p^2+1)$ є квадратом цілого числа.

(Клурман Олексій)

4. Заданий скінченний набір натуральних чисел $a_1, a_2, ..., a_n$. За один хід дозволяється вибрати довільну пару чисел з тих, що залишились, менше з двох – вилучити, а більше – збільшити на 1. Яке найменше число можна одержати в кінці?

(Руденко Олександр)

Другий день

5. Знайдіть найбільше натуральне число, що ділиться націло на 7, та має у своєму записі лише непарні цифри, сума яких 2015.

(Рубльов Богдан)

6. *а)* Андрій та Олеся отримали по набору з карток, на яких написані усі цілі числа від 1 до 2015. Після цього Олеся залишає собі деяку кількість карток (але не усі) зі свого набору, а решту відкладає. Андрій робить так само. На координатній площині розглядаються ті 2015^2 точок, які мають обидві цілі координати в межах від 1 до 2015 кожна. Олеся фарбує у блакитний колір ті з цих точок, у яких перша координата дорівнює числу на одній з її карток, а друга – на одній з Андрієвих карток, а Андрій фарбує у жовтий колір ті точки, у яких перша координата дорівнює числу на одній з його карток, а друга – на одній з Олесиних карток (при цьому деякі точки можуть бути пофарбовані у два кольори). Доведіть, що при будь-якому виборі карток, вони не зможуть досягти того, щоб кожна з 2015^2 точок була пофарбована принаймні в один з двох кольорів?

б) До Андрія та Олесі приєдналася Оксана, яка взяла собі усі картки, які відклали Олеся та Андрій. Після цього вони вже утрьох фарбують точки на новій чистій площині таким чином: Олеся фарбує у блакитний колір ті з цих точок, у яких перша координата дорівнює числу на одній з її карток, а друга – на одній з Андрієвих карток, Андрій фарбує у жовтий колір ті точки, у яких перша координата дорівнює числу на одній з його карток, а друга – на одній з Оксаниних карток, а Оксана фарбує у зелений колір ті точки, у яких перша координата дорівнює числу на одній з її карток, а друга – на одній з Олесиних карток (знову при цьому деякі точки можуть бути пофарбовані в декілька кольорів). При якому виборі карток Олесею та Андрієм вони утрьох зафарбують кожну з 2015^2 точок принаймні в один колір?

(Рубльов Богдан)

7. У гострокутному трикутнику ABC висоти AA_1 та BB_1 перетинаються в точці H. Побудуємо два кола w_1 та w_2 з центрами в точках H та B і радіусами HB_1 та BB_1 відповідно. З точки C до кіл w_1 та w_2 проведемо дотичні, які дотикаються до цих кіл у точках N та K, відмінних від B_1, відповідно. Доведіть, що точки A_1, N та K лежать на одній прямій.

(Нагель Ігор)

8. Знайдіть усі такі функції $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$, що для усіх дійсних x, y, справджується рівність:

$$4f\big(x+f(y)\big)=f(x)+f(y)+f(xy)+1.$$

(Анікушин Андрій)

11 КЛАС

Перший день

1. Знайдіть усі пари дійсних чисел $(x;\ y)$, які задовольняють рівність:

$$\{x\}+\{y\}=[x+y].$$

$[a]$ – ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, що не перевищує a, $\{a\}$ – дробова частина числа a, тобто $\{a\}=a-[a]$.

(Рубльов Богдан)

2. Натуральні числа a, p задовольняють умову: $p = 2^a - 1$. Знайдіть усі значення a, для яких число $\frac{1}{2}(p^2+1)$ є квадратом цілого числа.

(Клурман Олексій)

3. Є білий квадрат 8×8. За один хід Дмитро може вибрати повністю білий квадратик 2×2 та зафарбувати у чорний колір будь-які дві клітини цього квадратика, що розташовані по діагоналі. Яку максимальну кількість клітин за такими правилами Дмитро зможе зафарбувати?

(Петровський Дмитро)

4. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ з кутами ABC та BCD рівними $120°$, O – точка перетину діагоналей, M – середина сторони BC, K – точка перетину відрізків MO та AD. Відомо, що $\angle BKC = 60°$. Доведіть, що $\angle BKA = \angle CKD = 60°$.

(Сердюк Назар

Другий день

5. *а)* Чи існують 2015 натуральних чисел a_1, a_2, …, a_{2015} такі, що будь-які два з них є взаємно простими, а число $a_1a_2...a_{2015} - 1$ є добутком двох послідовних непарних чисел?

б) Чи існують 2015 натуральних чисел a_1, a_2, …, a_{2015} такі, що будь-які два з них є взаємно простими, а число $a_1a_2...a_{2015} - 1$ є добутком двох послідовних парних чисел?

(Ясінський В'ячеслав)

6. У гострокутному трикутнику ABC висоти AA_1 та BB_1 перетинаються в точці H. Побудуємо два кола w_1 та w_2 з центрами в точках H та B і радіусами HB_1 та BB_1 відповідно. З точки C до кіл w_1 та w_2 проведемо дотичні, які дотикаються до цих кіл у точках N та K, відмінних від B_1, відповідно. Доведіть, що точки A_1, N та K лежать на одній прямій.

(Нагель Ігор)

7. Послідовність натуральних чисел (a_n) задається правилом: $a_1 = a$, $a_2 = b$, де a та b -- натуральні, а для всіх $n \geq 2$ a_{n+1} дорівнює кількості індексів i, $1 \leq i \leq n$, таких, що $a_i = a_n$. Наприклад, для $a = 2, b = 1$ початок послідовності виглядатиме так (2; 1; 1; 2; 2; 3…). Знайдіть усі пари натуральних чисел (a, b), для яких, починаючи з деякого місця, послідовність $(a_n + a_{n+1})$ буде неспадною.

(Чорний Максим)

8. Для довільних різних чисел a, b розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + z = 2y + (a+b), \\ 3x^2 + 3xz = y^2 + 2(a+b)y + ab, \\ x^3 + 3x^2z = y^2(a+b) + 2yab. \end{cases}$$

(Рубльов Богдан)

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ ІІІ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ УЧНІВСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ, 2014-2015 Н.Р.
7 КЛАС

1. $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{2014}+2^{2015}=(1+2)+(2^2+2^3)+\ldots+(2^{2014}+2^{2015})=$
$=3+2^2(1+2)+\ldots+2^{2014}(1+2)=3\cdot(1+2^2+2^3+\ldots+2^{2014})$ ділиться на 3.

2. Якщо хлопчик побіжить до зупинки А, то він прибіжить туди одночасно з приходом трамваю. Оскільки хлопчик був від зупинки В удвічі далі, ніж від А, то коли він побіжить до В і пробіжить півшляху, трамвай саме підійде до зупинки А. Після цього трамвай і хлопчик одночасно прибувають на зупинку В, але трамвай проходить при цьому шлях, утричі довший, ніж пробігає хлопчик. Отже, швидкість хлопчика 10 км/год.

Відповідь: швидкість хлопчика 10 км/год.

3. Нехай N – кількість всіх учнів цього класу. Нехай s – сумарний зріст всіх учнів цього класу, крім найвищого. З умови видно, що s – ціле число.

Тоді $\frac{s}{N-1}=148\frac{3}{4}$, звідки (помноживши на 4) одержимо 4 s=595(N-1). Числа 4 та 595 взаємно прості, тому N-1 кратне 4.

Нехай тепер S – сумарний зріст всіх учнів цього класу, крім найнижчого. Маємо $\frac{S}{N-1}=149\frac{4}{7}$, звідки (помноживши на 7) одержимо 7 S=1047(N-1).

Числа 7 та 1047 взаємно прості, тому N-1 кратне 7.

Отже, N-1 кратне 4 і 7, а значить (оскільки 4 і 7 взаємно прості), кратне 28. За умовою, N не більше 40, значить N-1 не перевищує 39. Єдине число, яке кратне 28 і не перевищує 39, є 28. Тобто N-1=28, а отже N=29.

Відповідь: 29 учнів.

4. Зрозуміло, що $\angle BMN=60°$, оскільки $\angle AMD=180°$. Проведемо висоту BL у ΔBMN (рис. 1), тоді $\Delta BAM=\Delta BLM$ як прямокутні з спільною гіпотенузою та двома рівними кутами. Отже $AB=BL=BC$. Звідси $\Delta BNL=\Delta BNC$, як прямокутні з двома рівними сторонами. Тому з цих пар рівних трикутників маємо, що $\angle ABM=\angle MBL$ та $\angle LBN=\angle NBC$, тому

$\angle MBN=\angle MBL+\angle LBN=$
$=\frac{1}{2}(\angle ABL+\angle LBC)=\frac{1}{2}\angle ABC=45°$.

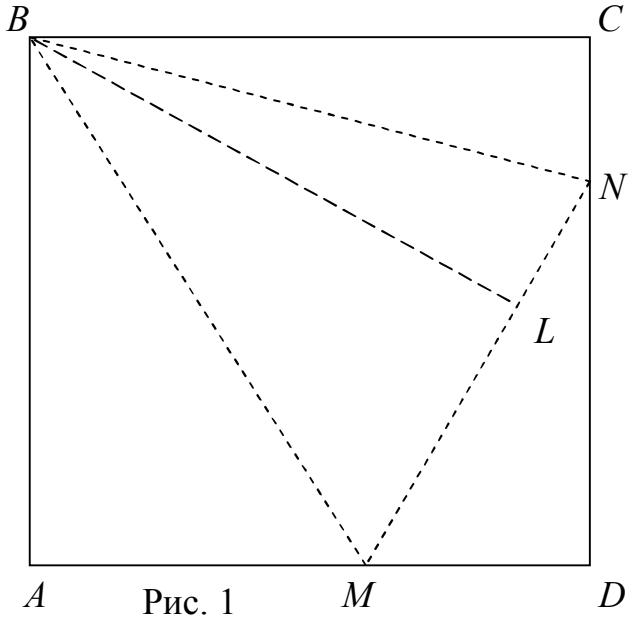

Рис. 1

Відповідь: $45°$.

5. Розфарбуймо таблицю в шаховому порядку. Якщо розташування чисел у таблиці задовольняє умову, його можна одержати в такий спосіб: у порожню спершу таблицю записати число 1, потім у сусідню клітинку записати

2, поруч записати 3 і т. д. Щоразу колір клітинки, в яку записуємо число, змінюється, а тому всі парні числа будуть у білих клітинках, а всі непарні – в чорних або навпаки. Оскільки довільний стовпчик містить принаймні 2 білих поля та принаймні 2 чорних, у ньому є два різних парних числа. Хоча б одне з них – не двійка, тобто не є простим. Таким чином, максимальна кількість простих чисел у стовпчику не може перевищувати 4. Залишається навести приклад, який підтверджує, що 4 простих числа трапитися в стовпчику можуть.

17	**18**	**19**	**20**	**21**
16	**1**	**2**	**3**	**22**
15	**6**	**5**	**4**	**23**
14	**7**	**8**	**9**	**24**
13	**12**	**11**	**10**	**25**

Рис. 2

Відповідь: 4; приклад заповнення наведений на рис. 2 (чотири простих числа трапляються в третьому стовпчику).

8 КЛАС

1. Зменшуване число закінчується цифрою 0 (бо воно містить множники 2 і 5). Від'ємник закінчується цифрою 5, бо містить множники 3 і 5, а інші множники всі непарні. Отже, різниця закінчується на 5.

Відповідь: цифрою 5

2. Додавання до числа одиниці змінює його парність. Додавання по 1 до двох змінює парність двох чисел. Якщо це були два парні числа, то парних чисел стане на два менше, якщо два непарні, то парних чисел стане на два більше. А якщо одне було парне, а інше непарне, то кількість парних чисел не змінюється. У кожному разі парність числа парних чисел не змінюється. Інакше кажучи, тут парність числа парних чисел – інваріант. Але якщо в шістці всі числа стануть однакові, парних серед них стане 0 або 6 – парне число.

3. Нехай N – кількість всіх учнів цього класу. Нехай s – сумарний зріст всіх учнів цього класу, крім найвищого. З умови видно, що s – ціле число.

Тоді $\frac{s}{N-1}=148\frac{3}{4}$, звідки (помноживши на 4) одержимо 4 s=595(N-1). Числа 4 та 595 взаємно прості, тому N-1 кратне 4.

Нехай тепер S – сумарний зріст всіх учнів цього класу, крім найнижчого. Маємо $\frac{S}{N-1}=149\frac{4}{7}$, звідки (помноживши на 7) одержимо 7 S=1047(N-1).

Числа 7 та 1047 взаємно прості, тому N-1 кратне 7.

Отже, N-1 кратне 4 і 7, а значить (оскільки 4 і 7 взаємно прості), кратне 28. За умовою, N не більше 40, значить N-1 не перевищує 39. Єдине число, яке кратне 28 і не перевищує 39, є 28. Тобто N-1=28, а отже N=29.

Маємо $s=\frac{595\cdot 28}{4}=595\cdot 7=4164$, $S=\frac{1047\cdot 28}{7}=1047\cdot 4=4188$

Нехай T – зріст найвищого учня класу, t – зріст найнижчого учня класу.

Тоді $s+T=S+t$, значить $T-t=S-s$=4188-4165=23 (см).

Відповідь: 23 (см).

4. У трикутнику AEC прямі AA_1 і CC_1 є бісектрисами, тому точка їх перетину D лежить на бісектрисі кута AEC (рис. 3). За умовою, бісектриса ED кута AEC перпендикулярна стороні AC, тобто є висотою трикутника AEC. Отже трикутник AEC – рівнобедрений ($AE=CE$), тому $\angle ACE=\angle CAE$. Але за умовою, $\angle ACC_1=\angle C_1CC_2=\angle C_2C$, отже $\angle ACE=\frac{2}{3}\angle ACB$. Аналогічно, $\angle CAE=\frac{2}{3}\angle CAB$.

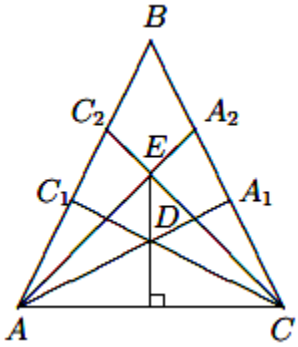

Рис. 3

Тоді з умови $\angle ACE=\angle CAE$ одержимо $\angle ACB=\angle CAB$. Таким чином, трикутник ABC – рівнобедрений ($AB=BC$).

5. Пронумеруємо клітинки, як показано на рис. 4. Клітинки з однаковими номерами утворюють пари. Другому гравцеві для перемоги досить кожного разу зафарбовувати клітинку з тої пари, клітинку з якої за останнім своїм ходом зафарбував гравець, що розпочав гру. Дотримуючись такої стратегії гри, другий гравець лише повторюватиме на одній з половин таблиці конфігурацію зафарбованих кліток, яка утворюється після ходу першого гравця. Тому зафарбований квадрат2×2 вперше з'явиться після ходу гравця, що почав гру.

1	2	3	4
5	6	7	8
1	2	3	4
5	6	7	8

Рис. 4

6. Задана множина точок площини симетрична відносно осей координат. За умови, що $x\geq 0$, $y\geq 0$, це дуга кола $(x-1)^2+(y-1)^2=2$, що міститься в першій чверті координатної площини. Площа всієї фігури, що обмежена заданою лінією, складається з площі квадрата зі стороною $2\sqrt{2}$ і площ чотирьох півкругів радіуса $\sqrt{2}$ (рис. 5).

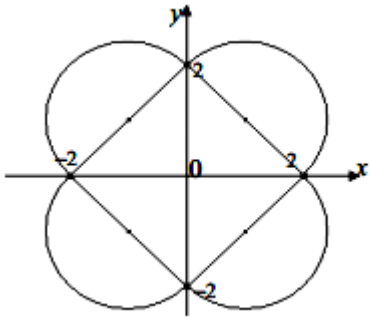

Рис. 5

Відповідь: 8+4π

9 КЛАС

1. Нехай $x=2015$, тоді

$$\frac{((x-10)(x+10)+100)\cdot((x-20)(x+20)+400)}{x^4}=\frac{(x^2-100+100)\cdot(x^2-400+400)}{x^4}=1.$$

2. Нехай m – кількість всіх хлопчиків класу, d – кількість дівчаток класу. Тоді сумарний зріст усіх хлопчиків класу дорівнює $S=155m$ см, сумарний зріст усіх дівчаток класу дорівнює $s=148\,d$ см. Отже, сумарний зріст усіх учнів цього класу дорівнює $S+s=155m+148\,d$ (см). З іншого боку, в класі $m+d$ учнів, а їх

середній зріст дорівнює 150 см, тоді сумарний зріст усіх учнів цього класу дорівнює 150(m+ d). Отже, 155m +148 d=150(m+ d).

$5m$=2 d, звідки $\frac{d}{m}=\frac{5}{2}$. Отже, дівчаток в 2,5 рази більше, ніж хлопчиків.

3. Нехай $a+b+c=6$ і $ab+bc+ca=9$.

Перший спосіб. Виразимо ab: $ab=9-c(a+b)=9-c(6-c)=9-6c+c^2=(c-3)^2 \geq 0$.

Аналогічно доводиться, що $bc \geq 0$ і $ac \geq 0$. Доведемо, що серед трьох даних чисел не має нулів. Припустимо, що $a=0$, тоді з рівності $ab=(c-3)^2$ випливає, що c=3, але тоді з умови $a+b+c=6$ випливає, що b=3, а це суперечить тому, що числа різні. Таким чином, $a\neq0$, $b\neq0$, $c\neq0$. Тоді із отриманих нерівностей випливає, що числа a, b, c одного знаку. Оскільки $a+b+c>0$, то $a>0$, $b>0$, $c>0$.

Другий спосіб. Виражаємо з першої рівності a та підставимо у другу рівність $a= 6 - b - c$, тоді $b^2+b(c-6)+(c-3)=0$. Розглядаємо цю рівність як квадратне рівняння відносно b, отримаємо $D=(c-6)^2-4(c-3)^2=-3c^2+12c=-3c(c-4)$.

Якщо $c<0$, то $D<0$ – рівняння розв'язків немає.

Якщо c=0, то b=3, тоді a=3, що суперечить тому, що числа різні. Таким чином, $c>0$. Виражаючи аналогічним чином змінні b, c отримаємо, що $a>0$, $b>0$.

4. $\angle APD=\angle PDC$, бо $\angle APD+\angle PDA=90°=\angle PDA+\angle PDC$.

З $\triangle DCE$ одержимо, що $\angle ECD=\angle PDA$. Продовжимо пряму CE до перетину з прямою AD в точці Q (рис .6). Тоді $\angle DQC=\angle APD$. Оскільки $AD=DC$, то $\triangle APD=\triangle DQC$.

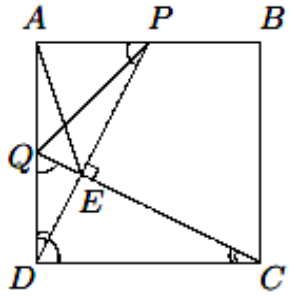

Рис. 6

Отже, $DQ=AP$, Q – середина сторони AD.

QP – діаметр кола. На якому лежить як точка A, так і точка E, бо $\triangle QPA$, $\triangle QPE$ – прямокутні. Отже, $\angle AEP=\angle AQP$ (бо спираються на дугу AP). Очевидно, що $\angle AQP$=45° (бо $\triangle AQP$ – прямокутний і рівнобедрений). Отже $\angle AEP$=45°

5. Нехай кольорами є білий та чорний, при цьому 9 має чорний колір. Припустимо, що твердження невірне. Для пари (1,; 2) можливі чотири варіанти розфарбування: (Б,Б), (Б, Ч), (Ч, Б), (Ч, Ч). Розглядаючи кожний з них окремо, легко приходимо до протиріччя. Наприклад, для пари (Б, Ч) міркування виглядають так.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Б	Ч							Ч
1) Тому що 2+7=9, тоді	7	Б							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Б	Ч					Б		Ч
2) Тому що 1+7=8, тоді	8	Б							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Б	Ч					Б	Ч	Ч
3) Тому що 1+6=7, тоді	6	Ч							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Б	Ч				Ч	Б	Ч	Ч

Отримано протиріччя, оскільки 2+6=8

6. Рівність виконуватиметься тоді і тільки тоді, коли

$$1 \le 3\left\{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}\right\} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le \left\{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}\right\} < \frac{2}{3}.$$

За означенням дробової частини числа маємо $\left\{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}\right\} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3} - n$, де $n = \left[\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}\right]$ – ціле невід'ємне число. Виконуючи рівносильні перетворення, отримаємо сукупність подвійних нерівностей $(1+3n)^2 \le x^2+y^2 < (2+3n)^2$, $n = 0,1, ...$, що задає концентричні кільця з центром в початку координат, ширина яких дорівнює 1; внутрішнє коло належить кільцю, а зовнішнє – ні (рис. 7).

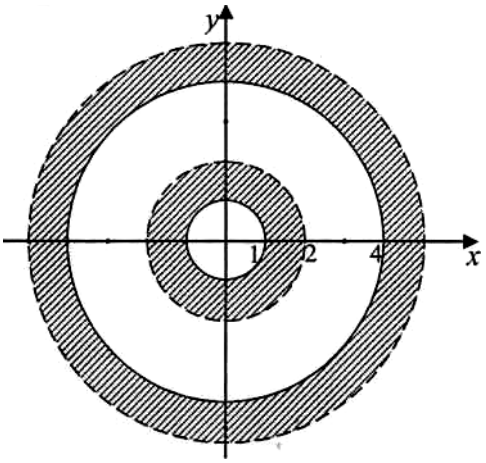

Рис. 7

10 КЛАС

1. Друге число більше. *Вказівка.* Скористатися нерівністю $\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{2} \le \sqrt[3]{\frac{a+b}{2}}$, яка доводиться за допомогою опуклості графіка функції $y = \sqrt[3]{x}$, де $x > 0$.

2. Нехай m – кількість всіх хлопчиків класу, d – кількість дівчаток класу. Тоді сумарний зріст усіх хлопчиків класу дорівнює $S = 155m$ см, сумарний зріст усіх дівчаток класу дорівнює $s = 148\,d$ см. Отже, сумарний зріст усіх учнів цього класу дорівнює $S + s = 155m + 148\,d$ (см). З іншого боку, в класі 28 учнів, а їх середній зріст дорівнює 150 см, тоді сумарний зріст усіх учнів цього класу дорівнює $28 \cdot 150 = 4200$ см. Отже, $m + d = 28$ і $155m + 148d = 4200$. Розв'яжемо систему рівнянь, одержимо $d = 20$. Отже, в класі 20 дівчаток.

Відповідь: 20 дівчаток

3. Нерівність $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10} \cdot \ldots \cdot \frac{n^2}{n^2+1} > \frac{1}{4}$, яка рівносильна заданій, будемо доводити способом послаблення, використовуючи очевидну нерівність

$\frac{k^2}{k^2+1} > \frac{k^2-1}{k^2}$ для $k=2, \ldots, n$. Маємо

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2}{n^2+1} > \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-1}{n^2} > \frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} > \frac{1}{4}.$$

4. Оскільки сторони $2n$-кутника рівні, то досить довести, що рівні суми відстаней до червоних та до синіх сторін. Для квадрата це очевидно. При $n>3$ продовжимо червоні сторони $2n$-кутника до їх взаємних перетинів. У результаті одержимо правильний n-кутник. Якщо S – його площа, b – довжина сторони, то сума відстаней від точки O до його сторін дорівнює $\frac{2S}{b}$. Аналогічно встановлюємо, що й сума відстаней від точки O до синіх сторін дорівнює $\frac{2S}{b}$.

5. Опустимо на діагональ AC перпендикуляри BK і DL (рис. 8).

Тоді $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot(BK+DL)$.

Покажемо, що $BK+DL\le AC$.

Нехай діагоналі AC і BD перетинаються в точці P. Розглянемо трикутники ABC і APD.

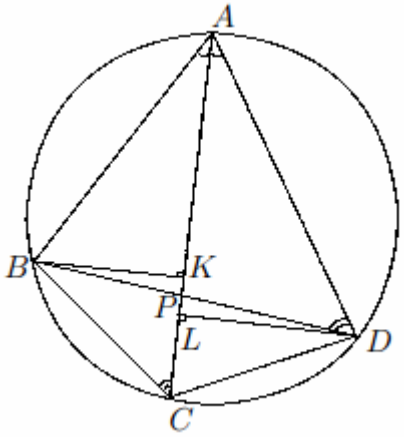

Рис. 8

За умовою, $\angle BAC=\angle PAD$. $\angle BCA=\angle BDA$, оскільки опираються на дугу AB. Отже, трикутники ABC і APD подібні, причому $\frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AP}$, $AB\cdot AD=AC\cdot AP$.

Розглянемо трикутник ABD. Маємо $S_{ABD}\le\frac{1}{2}AB\cdot AD=\frac{1}{2}\ AC\cdot AP$. З іншого боку, $S_{ABD}=S_{ABP}+S_{ADP}=\frac{1}{2}\ AP\cdot(BK+DL)$. Отже, $\frac{1}{2}\ AP\cdot(BK+DL)\le\frac{1}{2}\ AC\cdot AP$, $BK+DL\le AC$.

Маємо $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot(BK+DL)\le\frac{1}{2}\ AC^2$, що й потрібно було довести.

6. Якщо $0\le x<1$, то $\{x\}=x$, а тому маємо рівняння $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$. Його графіком є коло $O\left(\left(\frac{1}{2};0\right),\frac{1}{2}\right)$ без точки (1;0). Графіком заданого рівняння є нескінченний «ланцюжок», який отримаємо паралельним перенесенням побудованого кола вздовж осі абсцис на ціле число одиниць.

11 КЛАС

1. $y=\dfrac{1}{cos^2(arctgx)}=tg^2(arctgx)+1=x^2+1.$

Графік функції $y=\dfrac{2014}{cos^2(arctg(x-\pi))}-2015$ – парабола з вітками вгору і вершиною в точці (π;-1).

2. Нехай N – кількість всіх учнів цього класу. Нехай s – сумарний зріст всіх учнів цього класу, окрім найвищого. З умови видно, що s – ціле число.

Тоді $\dfrac{s}{N-1}=148\dfrac{3}{4}$, звідки (помноживши на 4) одержимо 4 s=595(N-1). Числа 4 та 595 взаємно прості, тому N-1 кратне 4.

Нехай тепер S – сумарний зріст всіх учнів цього класу, крім найнижчого. Маємо $\dfrac{S}{N-1}=149\dfrac{4}{7}$, звідки (помноживши на 7) одержимо 7 S=1047(N-1). Числа 7 та 1047 взаємно прості, тому N-1 кратне 7.

Отже, N-1 кратне 4 і 7, а значить (оскільки 4 і 7 взаємно прості), кратне 28. За умовою, N не більше 40, значить N-1 не перевищує 39. Єдине число, яке кратне 28 і не перевищує 39, є 28. Тобто N-1=28, а отже N=29.

Маємо $s=\dfrac{595\cdot 28}{4}=595\cdot 7=4164$, $S=\dfrac{1047\cdot 28}{7}=1047\cdot 4=4188$.

Сумарний зріст всіх учнів цього класу дорівнює їх середньому зросту, помноженому на кількість учнів, тобто 149·N=149·29=4321 см. Значить, зріст найвищого учня класу дорівнює 4321-s=4321-4165=156 (см), а зріст найнижчого учня класу дорівнює 4321-S=4321-4188=133 (см).

Отже, сумарний зріст всіх учнів цього класу, окрім 2: найвищого і найнижчого, дорівнює 4321-156-133=4032, а середній зріст 27 учнів класу $\dfrac{4032}{27}=149\dfrac{1}{3}$(см).

3. Нерівність $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{9}{10}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n^2}{n^2+1}>\dfrac{1}{4}$, яка рівносильна заданій, будемо доводити способом послаблення, використовуючи очевидну нерівність $\dfrac{k^2}{k^2+1}>\dfrac{k^2-1}{k^2}$ для k=2, …, n. Маємо

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2}{n^2+1}>\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-1}{n^2}>\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}>\frac{1}{4}.$$

4. Доведення 1. Припустимо протилежне. Розглянемо рівносторонній трикутник ABC зі стороною 1, всі вершини якого різного кольору. Візьмемо точку A_1, симетричну точці A відносно прямої BC. Тоді A_1 одного кольору з A і

коло з центром A і радіусу AA_1 повинно бути пофарбована в той же колір. На цьому колі знайдуться дві точки, відстань між якими дорівнює 1.

Доведення 2. Розглянемо на площині коло радіуса $\sqrt{3}$ з центром в точці O. Нехай P – довільна точка кола, $OAPB$ – ромб з діагоналлю OP і сторонами, рівними 1. Припустимо, що будь-які дві точки, відстань між якими дорівнює 1, пофарбовані в різні кольори. Нехай точка O забарвлена в колір I, тоді одна з точок A, B зафарбована в колір II, друга – в колір III (оскільки трикутник OAB правильний зі стороною 1). З цього випливає, що точка P, яка знаходиться на відстані 1 від A і B, зафарбована в колір I. Таким чином, всі точки кола пофарбовані в один і той самий колір. Неважко знайти дві точки на ній, відстань між якими дорівнює 1, що суперечить припущенню про те, що такої пари точок не існує. Що і потрібно було довести.

5. Опустимо на діагональ AC перпендикуляри BK і DL (рис. 9). Тоді $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot(BK+DL)$.

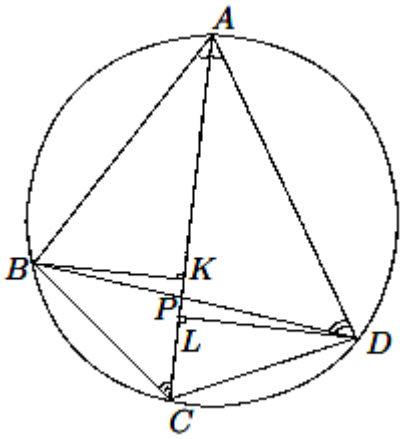

Рис. 9

Покажемо, що $BK+DL\le AC$. Нехай діагоналі AC і BD перетинаються в точці P. Розглянемо трикутники ABC і APD. За умовою, $\angle BAC=\angle PAD$. $\angle BCA=\angle BDA$, оскільки опираються на дугу AB.

Отже, трикутники ABC і APD подібні, причому $\frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AP}$, $AB\cdot AD=AC\cdot AP$.

Розглянемо трикутник ABD. Маємо $S_{ABD}\le\frac{1}{2}AB\cdot AD=\frac{1}{2}\ AC\cdot AP$. З іншого боку, $S_{ABD}=S_{ABP}+S_{ADP}=\frac{1}{2}$ $AP\cdot(BK+DL)$. Отже, $\frac{1}{2}\ AP\cdot(BK+DL)\le\frac{1}{2}\ AC\cdot AP$, $BK+DL\le AC$.

Маємо $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot(BK+DL)\le\frac{1}{2}\ AC^2$, що й потрібно було довести.

6. Якщо $0\le x<1$, то $\{x\}=x$, а тому маємо рівняння $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$. Його графіком є коло $O\left(\left(\frac{1}{2};0\right),\frac{1}{2}\right)$ без точки (1;0). Графіком заданого рівняння є нескінченний «ланцюжок», який отримаємо паралельним перенесенням побудованого кола вздовж осі абсцис на ціле число одиниць.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ IV ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ УЧНІВСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ, 2014-2015 Н.Р.

Перший день

8 КЛАС

1. Якщо ціле число n задовольняє умову, то число 4 подається як добуток чотирьох попарно різних цілих чисел. Оскільки цілими дільниками цього числа є лише числа ± 1, ± 2 та ± 4, то шуканими множниками можуть бути лише числа ± 1 та ± 2. Дійсно, якщо один з дільників за модулем дорівнює 4, то інші три повинні за модулем не перевищувати 1 і не бути нулем, що неможливо, оскільки таких чисел усього два.

Оскільки $n-2013$ – найбільший з множників, то він повинен дорівнювати 2, при цьому $n=2015$ – задовольняє умову задачі. З наведених міркувань зрозуміло, що це єдине число, що задовольняє умови задачі.

Відповідь: $n=2015$.

2. Позначимо для зручності блакитні монети Б1, …, Б5. Спочатку порівняємо 3 жовтих та 3 блакитних монети Б1, Б2, Б3:

$$1)\ Ж1+Ж2+Ж3\ ?\ Б1+Б2+Б3.$$

Розглянемо можливі випадки.

$$1а)\ Ж1+Ж2+Ж3=Б1+Б2+Б3.$$

Тоді можливі варіанти. Фальшиві серед Б1, Б2, Б3, або серед Б4 та Б5. У тій групі, де фальшиві монети, усі монети різної ваги.

Другим зважуванням порівняємо такі монети:

$$2)\ Б1\ ?\ Б2.$$

Можливі такі варіанти.

$$2а)\ Б1\ =\ Б2.$$

Це означає, що ці монети справжні, а тому фальшиві Б4 та Б5. Треба просто порівняти їх і з'ясувати яка більш важка, яка більш легка.

$$2б)\ Б1\ >\ Б2.$$

Тоді можливі три варіанти розподілу справжніх та фальшивих монет. Б1 – важка, Б2 легка, або Б1 – важка, Б2 справжня, або Б1 – справжня, Б2 легка. Порівняємо сумарну вагу монет Б1, Б2 та Ж1, Ж2 (двох справжніх). У першому випадку вони рівні, у другому Б1, Б2 важчі, а у третьому – легші за Ж1, Ж2, а тому маємо відповідь на усі питання після результатів третього зважування:

$$3)\ Ж1+Ж2\ ?\ Б1+Б2.$$

Очевидно, що аналогічно завершується розв'язання задачі у випадку

$$2в)\ Б1\ <\ Б2.$$

Другий випадок.

$$1б)\ Ж1+Ж2+Ж3>Б1+Б2+Б3.$$

Тоді серед Б1, Б2, Б3 є більш легка фальшива, а серед Б4, Б5 – більш важка. Далі все просто з'ясовується за допомогою другого та третього зважувань:

$$2)\ Б1\ ?\ Б2 \text{ та } 3)\ Б4\ ?\ Б5.$$

Наприклад, якщо 2а) $Б1 = Б2$ та 3а) $Б4 > Б5$, то Б3 фальшива більш легка, а Б4 – фальшива більш важка. Аналогічно розглядаються усі інші результати зважувань.

Третій випадок.

$$1в)\ Ж1+Ж2+Ж3<Б1+Б2+Б3.$$

Цей випадок аналогічний до випадку 1б), але тепер серед Б1, Б2, Б3 є більш важка фальшива, а серед Б4, Б5 – більш легка.

Відповідь: зможе.

3. Помножимо чисельник та знаменник кожного з шести доданків на вираз, спряжений до відповідного знаменника:

$$\frac{\sqrt{2014}+\sqrt{x}}{2014-x}+\frac{\sqrt{2015}+\sqrt{x+1}}{2015-(x+1)}+\frac{\sqrt{2016}+\sqrt{x+2}}{2016-(x+2)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2015-x}+\sqrt{1}}{(2015-x)-1}+\frac{\sqrt{2016-x}+\sqrt{2}}{(2016-x)-2}+\frac{\sqrt{2017-x}+\sqrt{3}}{(2017-x)-3}$$

Неважко побачити, що усі дроби мають спільний знаменник, тому помножимо на нього і одержимо таке рівняння:

$$\sqrt{2014}+\sqrt{x}+\sqrt{2015}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2016}+\sqrt{x+2}=$$
$$=\sqrt{2015-x}+\sqrt{1}+\sqrt{2016-x}+\sqrt{2}+\sqrt{2017-x}+\sqrt{3},$$

при цьому $x\neq 2014$. Побачимо, що мають місце такі твердження:

1) $x=1$ – є коренем рівняння, бо при такому значенні x ліва і права частини нерівності складаються з однакових доданків:

$$\sqrt{2014}+\sqrt{1}+\sqrt{2015}+\sqrt{2}+\sqrt{2016}+\sqrt{3}=$$
$$\sqrt{2014}+\sqrt{1}+\sqrt{2015}+\sqrt{2}+\sqrt{2016}+\sqrt{3}.$$

2) Позначимо через $S=\sqrt{2014}+\sqrt{1}+\sqrt{2015}+\sqrt{2}+\sqrt{2016}+\sqrt{3}$. Тоді при $x>1$ маємо, що

$$\sqrt{2014}+\sqrt{x}+\sqrt{2015}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2016}+\sqrt{x+2}>$$
$$\sqrt{2014}+\sqrt{1}+\sqrt{2015}+\sqrt{2}+\sqrt{2016}+\sqrt{3}=S,$$

тобто ліва частина більша за S, аналогічно для правої частини маємо, що

$$\sqrt{2015-x}+\sqrt{1}+\sqrt{2016-x}+\sqrt{2}+\sqrt{2017-x}+\sqrt{3}<$$
$$<\sqrt{2014}+\sqrt{1}+\sqrt{2015}+\sqrt{2}+\sqrt{2016}+\sqrt{3}=S.$$

Таким чином на цьому проміжку розв'язків немає. Аналогічно при $x<1$ ліва частина менша, а права частина більша ніж S

Відповідь: $x=1$.

4. Відмітимо середини діагоналей M_1 та M_2, як це показано на рис. 10. Як відомо, $M_1M_2 \parallel BC$. Побудуємо описані кола трикутників ΔAQC та ΔBPD. Нехай вони вдруге перетинають прямі BD та AC у точках X та Y відповідно. Оскільки BD містить бісектрису $\angle AQC$, то точка X є серединою більшої дуги AC описаного кола трикутника ΔAQC. Тоді X належить серединному перпендикуляру відрізка AC.

Аналогічно, Y належить серединному перпендикуляру відрізка BD. Отже, чотирикутник XM_1M_2Y є вписаним, бо $\angle XM_1Y = \angle XM_2Y = 90°$.

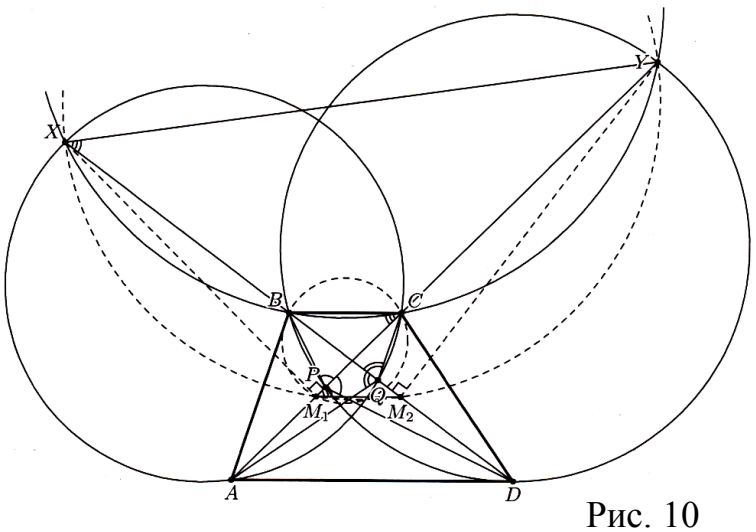

Рис. 10

Тоді $\angle M_1XM_2 = \angle M_1YM_2$.

$\angle BXY = \angle CM_1M_2 = \angle M_1CB$, звідки чотирикутник $XBCY$ є вписаним.

Звідси, $\angle BXC = \angle BYC$. Тоді

$$\angle AQC = 180° - 2\angle M_1XC = 180° - 2(\angle M_1XM_2 + \angle M_2XC) =$$
$$= 180° - 2(\angle M_1YM_2 + \angle M_1YB) = 180° - 2\angle M_2YB = \angle BPD.$$

Альтернативне розв'язання

Відмітимо на діагоналі BD точку Q' (рис. 11), таку, що $\angle BQ'C = \angle BPC$.

З рівності цих кутів випливає, що чотирикутник $BCQ'P$ є вписаним. Тоді $\angle Q'PC = \angle Q'BC = \angle Q'DA$, звідки випливає, що вписаним є також чотирикутник $APQ'D$. Тоді

$\angle CPD = \angle CPQ' + \angle Q'PD =$

$= \angle Q'DA + \angle Q'AD = \angle BQ'A$.

$\angle BPD = \angle CQ'A$.

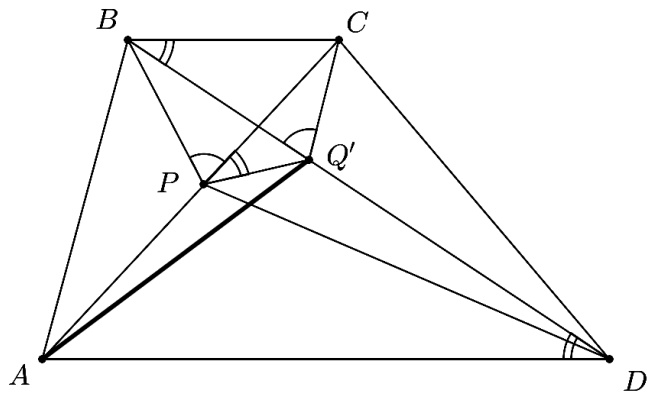

Рис. 11

Крім того BD є бісектрисою кута $\angle CQ'A$.

Покажемо, що $Q' = Q$. Припустимо, що ці точки різні. Оскільки $\angle CQB = \angle AQB$ та $\angle CQ'B = \angle AQ'B$, то трикутники $CQ'Q$ та $AQ'Q$ є рівними. Це означає, що пряма BD є серединним перпендикуляром до відрізка AC. Нескладно побачити, що з цього випливає, що чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом, але тоді він не є трапецією, що суперечить умові. Таким чином, $Q' = Q$, звідки і випливає твердження задачі.

9 КЛАС

1. Нехай цукерки та картопля коштують відповідно x та y гривень, при цьому $N=\overline{ab}=10a+b$, $M=\overline{ba}=10b+a$. З умови задачі $M>N$ тому $b>a>0$. Тоді маємо такі рівняння:

$$\tfrac{1}{5}x+y=10a+b \text{ та } \tfrac{1}{5}y+x=10b+a, \text{ або } x+5y=50a+5b \text{ та}$$

$$y+5x=50b+5a.$$

Тут $b>a>0$ – цифри, а $x>y$ не більше ніж двоцифрові числа. Тоді

$$4(x-y)=45(b-a). \qquad (1)$$

$$6(x+y)=55(b+a). \qquad (2)$$

Таким чином $b-a\vdots 4$ та $b+a\vdots 6$. Розглянемо ті пари цифр, що задовольняють умови (1) та (2). Таких пар усього дві: $b=5$, $a=1$ та $b=8$, $a=4$. Розглянемо ці випадки.

Випадок 1. $b=5$, $a=1$, тоді $\begin{cases}x-y=45,\\ x+y=55.\end{cases}$ Звідси $x=50$, $y=5$.

Випадок 2. $b=8$, $a=4$, тоді $\begin{cases}x-y=45,\\ x+y=110.\end{cases}$ Звідси x, y – не цілі.

Відповідь: цукерки коштують 50 гривень, а картопля – 5 гривень.

2. Припустимо, що Олеся програла 2 гри. Тоді вона набрала 5 очок. Оксана не могла набрати 4 очки, оскільки тоді усього разом усіма командами було здобуто максимум $5+4+3\cdot 6=27$ перемог. А усього зустрічей було зіграно рівно $\frac{1}{2}(8\cdot 7)=28$ – суперечність. Так само Оксана не могла набрати 3 чи менше очок, або Олеся програти 3 чи більше ігор. Таким чином усього Олеся могла програти щонайбільше 1 гру. Цей варіант можливий, про що свідчить наведений у таблиці (рис. 12) приклад.

М	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**оч**
1	X	0	1	1	1	1	1	1	6
2	1	X	1	0	1	0	1	0	4
3	0	0	X	1	0	1	0	1	3
4	0	1	0	X	1	0	1	0	3
5	0	0	1	0	X	1	0	1	3
6	0	1	0	1	0	X	1	0	3
7	0	0	1	0	1	0	X	1	3
8	0	1	0	1	0	1	0	X	3

Рис. 12

3. Застосуємо нерівність Коші-Шварца для трійок чисел $\sqrt{\frac{a}{b+1}}, \sqrt{\frac{b}{c+1}}, \sqrt{\frac{c}{a+1}}$ та $\sqrt{a(b+1)}, \sqrt{b(c+1)}, \sqrt{c(a+1)}$ і одержимо, що

$$\sqrt{\tfrac{a}{b+1}}\cdot\sqrt{a(b+1)}+\sqrt{\tfrac{b}{c+1}}\cdot\sqrt{b(c+1)}+\sqrt{\tfrac{c}{a+1}}\cdot\sqrt{c(a+1)}\le$$

$$\le\sqrt{(\tfrac{a}{b+1}+\tfrac{b}{c+1}+\tfrac{c}{a+1})\big(a(b+1)+b(c+1)+c(a+1)\big)}\ \Leftrightarrow$$

$$(\tfrac{a}{b+1}+\tfrac{b}{c+1}+\tfrac{c}{a+1})\big(a(b+1)+b(c+1)+c(a+1)\big)\ge(a+b+c)^2\ \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a(b+1)+b(c+1)+c(a+1)}.$$

Тепер нам достатньо довести, що

$$\frac{(a+b+c)^2}{a(b+1)+b(c+1)+c(a+1)}\ge 2.$$

Остання нерівність рівносильна такій:

$$a^2+b^2+c^2 \ge 2a+2b+2c. \qquad (1)$$

Знову застосуємо нерівність Коші-Шварца тепер для трійок чисел a, b, c та $2, 2, 2$:

$$(a^2+b^2+c^2)(4+4+4) \ge (2a+2b+2c)^2 \text{ або } 3(a^2+b^2+c^2) \ge (a+b+c)^2. \quad (2)$$

Покажемо, що $a+b+c \ge 6$. З умови задачі маємо, що $a+b+c+2=abc$, тому

$$abc=(a+b)+(c+2) \ge 2\sqrt{ab}+2\sqrt{2c} \ge 2\sqrt{2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{2c}} \Leftrightarrow (abc)^2 \ge 16\sqrt{2abc} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (abc)^4 \ge 512abc \Leftrightarrow (abc)^3 \ge 512 \Leftrightarrow abc \ge 8.$$

Звідси маємо, що $a+b+c \ge abc-2 \ge 6$, тоді з нерівності (2) маємо, що

$$a^2+b^2+c^2 \ge \tfrac{1}{3}(a+b+c)(a+b+c) \ge \tfrac{1}{3}\cdot 6\cdot(a+b+c)=2(a+b+c),$$

звідки випливає потрібна нерівність (1).

Альтернативне розв'язання

Помітимо, що набори додатних чисел (a, b, c) та $\left(\frac{1}{a+1}, \frac{1}{b+1}, \frac{1}{c+1}\right)$ протилежно впорядковані. Тому, за транс-нерівністю

$$\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1} \ge \frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=\frac{a(b+1)(c+1)+b(c+1)(a+1)+c(b+1)(a+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}=$$

$$=\frac{abc+ab+ac+a+abc+bc+ba+b+abc+cb+ca+c}{abc+ab+bc+ca+a+b+c+1}=$$

$$=\frac{3abc+2(ab+bc+ca)+abc-2}{abc+ab+bc+ca+abc-1}=2,$$

що й потрібно було довести.

4. Наведемо розв'язок для розташування точок, зображеного на рис. 13. (для інших випадків розташування розв'язок буде подібним).

Доведемо, що для будь-якого вибору точки D чотирикутник $XOYZ$ є вписаним. Тоді $\angle XZY = 180^\circ - 2\angle A$, тобто не залежить від вибору точки D на стороні BC.

З умов задачі очевидно випливає,

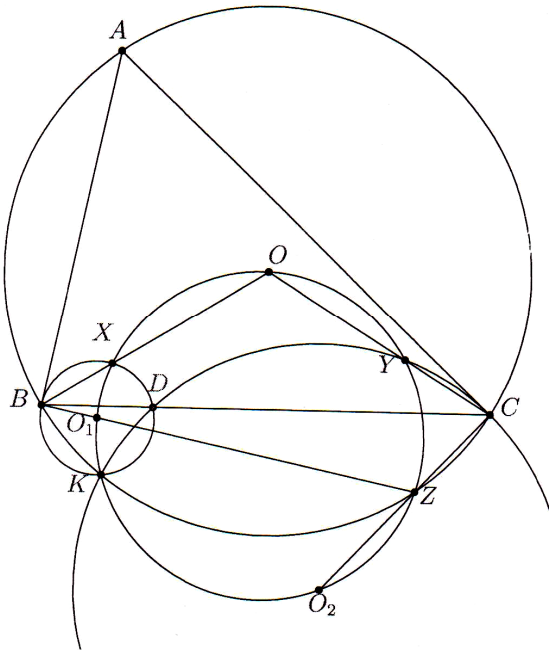

Рис. 13

що описані кола ΔBXD та ΔDYC дотикаються до прямих AB та AC відповідно.

Позначимо ці кола як w_1 та w_2, а їх центри через O_1 та O_2 відповідно. Нехай K – друга точка перетину цих кіл, що відмінна від точки D (рис. 13). Тоді

$$\angle BKC = \angle BKD + \angle DKC = \angle B + \angle C = 180° - \angle A,$$

тобто точка K належить описаному колу ΔABC. Також маємо

$$\angle XKY = \angle XKD + \angle DKY = \angle XBD + \angle DCY = 180^0 - \angle XOY,$$

тобто чотирикутник $XOYK$ – вписаний. Зазначимо, що оскільки AZ – діаметр великого кола, то $AB \perp BZ$, а тому O_1 належить прямій BZ. Аналогічно O_2 належить прямій CZ.

Доведемо, що O_1, O_2 належать описаному колу чотирикутника $OXKY$. Справді, $\angle XO_1K = 2\angle XBK = 2(90° - \frac{1}{2}\angle BOK) = 180° - \angle XOK$, аналогічно і для точки O_2. Тепер доведемо, що і точка Z належить описаному колу чотирикутника $OXKY$, що й завершить розв'язання задачі.

Для цього достатньо довести, що $\angle O_1ZO_2 + \angle O_1KO_2 = 180°$. Справді,

$$\angle O_1KO_2 = \angle O_1KD + \angle DKO_2 = 90° - \angle DBK + 90° - \angle DCK = 180° - \angle A =$$
$$= \angle BZC = 180° - \angle O_1ZO_2.$$

10 КЛАС

1. Перепишемо рівняння у вигляді:

$$\cos[x] \cdot \cos\{x\} = \sin[x] \cdot \sin\{x\},$$

при умові, що $\sin[x] \cdot \sin\{x\} \neq 0$. Перенесемо усе в один бік і одержимо, що

$$\cos[x] \cdot \cos\{x\} - \sin[x] \cdot \sin\{x\} = \cos([x] + \{x\}) = \cos x = 0.$$

Звідси знаходимо, що $x = \frac{1}{2}\pi + \pi k$, $k \in Z$.

Залишається переконатись, що усі ці значення належать ОДЗ.

Дійсно, жодне з цих значень не є цілим, оскільки вони усі ірраціональні, тому $\{x\} \neq 0 \Rightarrow \{x\} \in (0; 1) \Rightarrow \sin\{x\} \neq 0$. Крім того, оскільки рівність $\sin y = 0$ виконується при $y = \pi n$, $n \in Z$, то рівність нулю при цілих y можлива лише при $y = 0$. Помітимо, що при $k \geq 0$ $x = \frac{1}{2}\pi + \pi k > 1$ і $[x] > 0$, а при $k < 0$ $x = \frac{1}{2}\pi + \pi k < -1$ і $[x] < 0$. Таким чином усі знайдені x задовольняють рівняння.

Відповідь: $x = \frac{1}{2}\pi + \pi k$, $k \in Z$.

2. Проведемо через точку M прямі, паралельні до сторін трикутника ABC. Нехай вони перетинають сторони AB, BC, AC в точках C_1, C_2; A_1, A_2; B_1, B_2 відповідно (рис. 14). Отже, $C_1A_2 \parallel AC$, $A_1B_2 \parallel BA$, $B_1C_2 \parallel BC$, а також прямі C_1A_2, A_1B_2 та B_1C_2 перетинаються в точці M.

Розглянемо ΔA_1MA_2 – правильний.

Пряма M_1M містить його висоту, бо є перпендикулярною до BC. Тоді M_1M – це подвоєння його медіани, тому $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} = \overrightarrow{MM_1}$, аналогічно

$\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MB_2}=\overrightarrow{MM_2}$ та $\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{MC_2}=\overrightarrow{MM_3}$. З іншого боку MC_1AB_2 – паралелограм, тому $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{MB_2}$.

Аналогічно $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC_2}+\overrightarrow{MA_1}$ та $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MB_1}$. Звідси й маємо шукане:

$$\overrightarrow{MM_1}+\overrightarrow{MM_2}+\overrightarrow{MM_3}=$$
$$=\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MB_2}+\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{MC_2}=$$
$$=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.$$

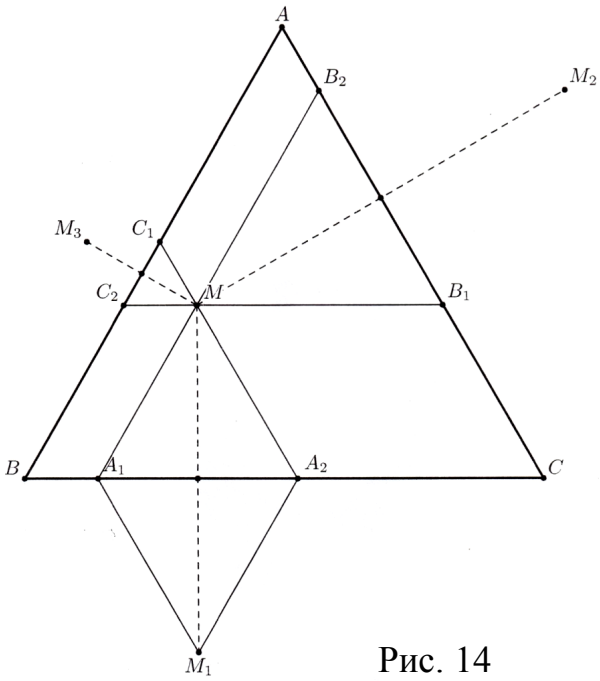

Рис. 14

3. При $a=1$ маємо, що $p=1$ і $\frac{1}{2}(p^2+1)=1$ – задовольняє умову.

При $a=2$ маємо, що $p=3$ і $\frac{1}{2}(p^2+1)=5$ – умову не задовольняє.

Нехай тепер $a\geq 3$. Припустимо, що $\frac{1}{2}(p^2+1)=p_1^2$, тоді $p^2-2p_1^2=-1$. Підставимо значення p з умови: $2^{2a}-2^{a+1}+1-2p_1^2=-1$ або $2^{2a-1}-2^a=p_1^2-1$. Звідси $2^a(2^{a-1}-1)=(p_1-1)(p_1+1)$. Оскільки ліва частина рівності парна, то й права частина – парна. Тоді кожен з виразів у дужках є парним і $НСД(p_1-1;\ p_1+1)=2$. Таким чином, можливі такі випадки.

1) $p_1+1=2l$, при цьому $kl=2^{a-1}-1$.

При $k\geq 2$ $p_1\geq 2^a+1$ і $l\geq 2^{a-1}+1$, що суперечить рівності $kl=2^{a-1}-1$.

При $k=1$ $p_1=2^{a-1}+1$ і $l=2^{a-2}+1$ і $kl=2^{a-2}+1=2^{a-1}-1$. Звідси $a=3$.

2) $p_1-1=2k$, $p_1+1=2^{a-1}l$, при цьому $kl=2^{a-1}-1$.

При $l\geq 2$ $p_1\geq 2^a-1$ і $k\geq 2^{a-1}-1$, звідки $2^{a-1}-1=kl\geq 2^a-2$, звідки $a=1$.

При $l=1$ $p_1=2^{a-1}-1$ і $k=2^{a-2}-1$ і $kl=2^{a-2}-1=2^{a-1}-1$ – суперечність.

Відповідь: $a=1$ та $a=3$.

4. Нехай задані числа задовольняють умови: $a_1\leq a_2\leq ...\leq a_n$. Визначимо для набора чисел $A=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ функцію $f(A)=2^{a_1}+2^{a_2}+...+2^{a_n}$. Тоді при переході від набору $A=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ до набору A', якщо були обрані числа $a_i\leq a_j$, маємо, що: $f(A')-f(A)=2^{a_j+1}-2^{a_i}-2^{a_j}=2^{a_j}-2^{a_i}\geq 0$, тобто функція f не спадає.

Позначимо через t найменше натуральне число, для якого з самого початку виконувалась нерівність $f(A) \le 2^t$.

Доведемо, що якщо a – останнє число, що залишилось, то $a \ge t$.
Дійсно, якщо припустити супротивне, тобто що $a < t$, тобто $a \le t-1$, то оскільки f не спадає, маємо, що $f(A) \le f(\{a\}) = 2^a \le 2^{t-1}$, що суперечить вибору числа t.

Покажемо, що якщо на кожному кроці вибирати пару найменших чисел, то наприкінці одержимо, що $a = t$. Дійсно, якщо ми прибираємо число a_1, а число a_2 замінюємо на $a_2 + 1$, то маємо, що

$f(A') - f(A) = 2^{a_2+1} - 2^{a_1} - 2^{a_2} = 2^{a_2} - 2^{a_1}$ або $f(A') = f(A) + 2^{a_2} - 2^{a_1}$.

За побудовою числа t та вибором двох найменших чисел маємо, що

$$f(A) \le 2^t \Leftrightarrow f(A) - 2^{a_1} \le 2^t - 2^{a_2} \Leftrightarrow f(A) + 2^{a_2} - 2^{a_1} \le 2^t \Leftrightarrow f(A') \le 2^t.$$

Таким чином $a \le t$, звідки остаточно маємо, що $a = t$.

Відповідь: найменше натуральне число t, для якого виконується нерівність $f(A) = 2^{a_1} + 2^{a_2} + ... + 2^{a_n} \le 2^t$.

11 КЛАС

1. Зрозуміло, що з умов задачі випливає, що число $\{x\} + \{y\}$ - ціле, а оскільки $0 \le \{x\} < 1$, то можливі два варіанти: $\{x\} + \{y\} = 0$ або $\{x\} + \{y\} = 1$.

Варіант 1: $\{x\} + \{y\} = 0$. Це означає, що $\{x\} = \{y\} = 0$, а тому $x,\ y \in Z$. Але тоді $[x + y] = x + y = 0$, звідси розв'язками є такі пари чисел: $(n; -n)$, де $n \in Z$.

Варіант 2: $\{x\} + \{y\} = 1$. Звідси очевидно, що $x,\ y \notin Z$, бо якщо одне з них, наприклад, x ціле, то $\{x\} = 0$, звідси $\{y\} = 1$, що неможливо. Нехай тепер $x \notin Z$, тоді $x + y = [x] + \{x\} + [y] + \{y\} = [x] + [y] + 1$,
тобто $x + y$ – ціле число. Тоді $x + y = [x + y] = 1$. Тобто у цьому випадку шуканими розв'язками є пари чисел $(x; 1 - x)$, де $x \notin Z$.

Відповідь: $(n; -n)$, де $n \in Z$ та $(x; 1 - x)$, де $x \notin Z$.

2. При $a = 1$ маємо, що $p = 1$ і $\frac{1}{2}(p^2 + 1) = 1$ – задовольняє умову.

При $a = 2$ маємо, що $p = 3$ і $\frac{1}{2}(p^2 + 1) = 5$ – умову не задовольняє.

Нехай тепер $a \ge 3$. Припустимо, що $\frac{1}{2}(p^2 + 1) = p_1^2$, тоді $p^2 - 2p_1^2 = -1$. Підставимо значення p з умови: $2^{2a} - 2^{a+1} + 1 - 2p_1^2 = -1$ або $2^{2a-1} - 2^a = p_1^2 - 1$. Звідси $2^a(2^{a-1} - 1) = (p_1 - 1)(p_1 + 1)$. Оскільки ліва частина рівності парна, то й

права частина – парна. Тоді кожен з виразів у дужках є парним і $НСД(p_1-1;\ p_1+1)=2$. Таким чином, можливі такі випадки.

1) $p_1+1=2l$, при цьому $kl=2^{a-1}-1$.

При $k\geq 2$ $p_1\geq 2^a+1$ і $l\geq 2^{a-1}+1$, що суперечить рівності $kl=2^{a-1}-1$.

При $k=1$ $p_1=2^{a-1}+1$ і $l=2^{a-2}+1$ і $kl=2^{a-2}+1=2^{a-1}-1$. Звідси $a=3$.

2) $p_1-1=2k$, $p_1+1=2^{a-1}l$, при цьому $kl=2^{a-1}-1$.

При $l\geq 2$ $p_1\geq 2^a-1$ і $k\geq 2^{a-1}-1$, звідки $2^{a-1}-1=kl\geq 2^a-2$, звідки $a=1$.

При $l=1$ $p_1=2^{a-1}-1$ і $k=2^{a-2}-1$ і $kl=2^{a-2}-1=2^{a-1}-1$ – суперечність.

Відповідь: $a=1$ та $a=3$.

3. Спочатку покажемо, як досягти потрібної кількості зафарбувань. У кожному квадратику 4×4 проведемо фарбування у такій послідовності. Спочатку вибираємо усі чотири квадрати 2×2, на які розбивається квадрат 4×4, і фарбуємо там діагоналі, як це показане на рис. 15 (чорні квадратики). Після цього всередині утворюється повністю білий квадрат 2×2, у якому ми фарбуємо будь-яку з діагоналей (сірі квадратики).

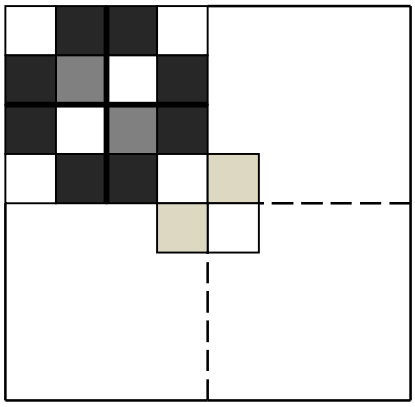

Рис. 15

По завершенню фарбування усіх чотирьох квадратів 4×4 у самому центрі великого квадрату 8×8 утворився повністю білий квадратик 2×2, у якому ми фарбуємо ще дві клітини (світло сірі).

Разом маємо, що зафарбованими стали: $10\cdot 4+2=42$ квадратиків 1×1.

Покажемо, що більшу кількість зафарбувати не можна. Поряд із заданим квадратом 8×8 (назвемо його «заданим») розглянемо квадрат 7×7, утворений їх центрами (назвемо його «центральним»).

Фарбування діагоналі квадрату 2×2 у заданому квадраті відповідає проведенню відповідної діагоналі у квадраті 1×1 центрального квадрату (рис. 16).

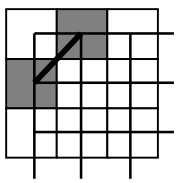

Рис. 16

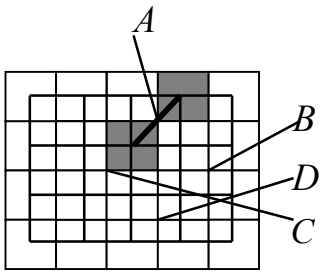

Рис. 17

Неважко побачити, що у двох сусідніх по стороні квадратах 1×1 центрального квадрату діагональ провести не можна.

Розглянемо прямокутник 3×4 центрального квадрату, і покажемо, що в ньому не можна провести діагоналі рівно в половині квадратів. Якщо це так, то діагоналі будуть проведені у шести квадратиках 1×1. Виберемо чотири квадрати A, B, C, D, у яких проведені діагоналі і серед них немає кутових (рис. 17).

Покажемо, що в усіх них одночасно діагональ провести неможливо. Нехай, наприклад, першою було проведена діагональ (тобто пофарбовані дві діагональні клітинки у заданому квадраті) у квадраті A, наприклад, у тому напрямі, як це показане на рис. 17. Тоді у квадраті C провести діагональ неможливо.

Таким чином, у прямокутнику 3×4 можна провести максимум 5 діагоналей.

Тепер розіб'ємо весь центральний квадрат 7×7 на чотири прямокутники 3×4 та квадратик 1×1, як це показане на рис. 9. Тоді максимум можна провести $5\cdot 4+1=21$ діагональ, що відповідає зафарбуванню як раз 42 клітин.

Відповідь: 42.

4. Нехай прямі AB та CD перетинаються в точці E.

За умовою $\angle BKC=60°$. Доведемо, що $BK>\frac{1}{2}BC$. Справді, один з кутів $\angle KBC$ чи $\angle KCB$ не менше $60°$.

Не обмежуючи загальності, припустимо, що це $\angle KBC$ (рис. 18). Тоді у ΔBMK $\angle KBM\geq 60°=\angle BKC>\angle BKM$. Звідси $MK>BM$, отже на відрізку BK знайдеться така точка O', що $MK\cdot MO'=BM^2=MC^2$.

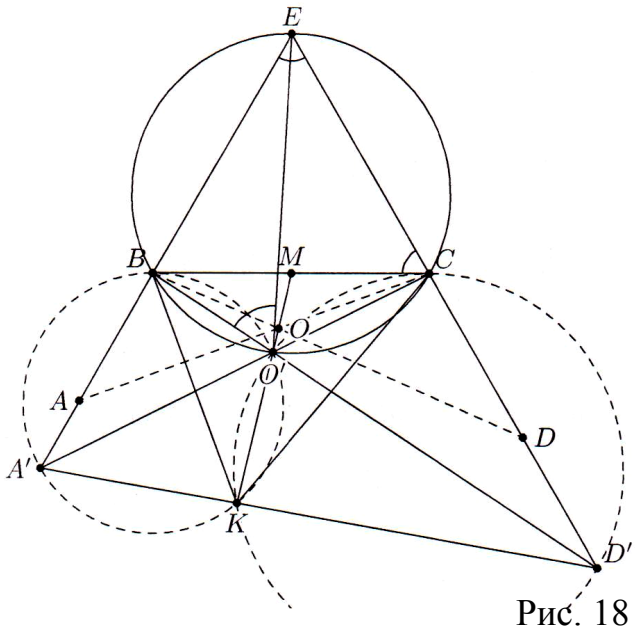

Рис. 18

Тоді описані кола $\Delta BO'K$ та $\Delta CO'K$ дотикаються до BC. Отже, $\angle BKM=\angle O'BC$, $\angle CKM=\angle O'CB$.

$\angle BO'C=180°-\angle O'BC-\angle O'CB=180°-\angle BKM-\angle MKC=180°-60°=120°$.

Отже точка O' належить описаному колу ΔEBC. Нехай пряма BO' перетинає CE у D', а CO' перетинає BE у точці A'. Чотирикутник $BECO'$ вписаний у коло , отже $\angle BO'E=\angle BCE=60°=\angle EBC=\angle EO'C$ (рис. 18).

Розглянемо трикутники $\Delta O'EB$ та $\Delta EBD'$. У них дві пари кутів рівні. Отже в третій парі кути рівні, тобто $\angle BEO'=\angle ED'B$.

Тоді $\angle BEO'=\angle BCO'=\angle CKO'=\angle ED'B$.

Звідси точка D' належить описаному колу трикутника $\Delta KO'C$. Аналогічно, точка A' належить описаному колу трикутника $\Delta BKO'$. Тоді $\angle A'KB=\angle A'O'B=60°=\angle CO'D'=\angle CKD'$. Це означає, що точки A', K та D'

лежать на одній прямій. Точка O лежить десь на відрізку MK. Якщо ця точка всередині відрізка MO', то точка A лежить всередині відрізка $A'B$, а D – всередині CD'. Тоді точка K лежить строго за межами трикутника ΔEAD, але за умовою точка K належить відрізку AD і маємо суперечність.

Аналогічно, якщо точка O розташована поза MO', то точки A, D лежать поза відрізками EA' та ED', тобто точка K лежить строго всередині трикутника ΔEAD, знову маємо суперечність.

Це означає, що $O = O'$. Тоді $A = A'$ та $D = D'$. А вже було доведено вище, що $\angle A'KB = \angle CKD' = 60°$, що і треба було довести, оскільки $A = A'$ та $D = D'$.

Другий день

8 КЛАС

1. Перепишемо умову про середнє гармонічне: $b = \frac{2ac}{a+c}$, а тепер сюди підставимо замість $c = \frac{a+b}{2}$ і матимемо:

$$2a \cdot \tfrac{a+b}{2} = b(a + \tfrac{a+b}{2}) \Leftrightarrow a^2 + ab = ba + \tfrac{ab+b^2}{2} \Leftrightarrow 2a^2 = ba + b^2 \Leftrightarrow (a-b)(2a+b) = 0.$$

Виберемо, наприклад, $a = 2$, тобі $b = -4$, звідси $c = -1$ і одержана трійка різних чисел умови задовольняє.

Відповідь: не обов'язково.

2. За теоремою Варіньона чотирикутник $MPNQ$ – паралелограм, причому його сторони паралельні діагоналям трапеції $ABCD$, а тому він є прямокутником (рис. 19). Нехай O – точка перетину AC і BD. Тоді з властивості прямокутного ΔMNL маємо $OL = OM = ON \Rightarrow OL = OP = OQ$, тому ΔPQL – прямокутний. Тобто $PL \perp LQ$, а оскільки $AB \| CD$, то $PL \perp AB$.

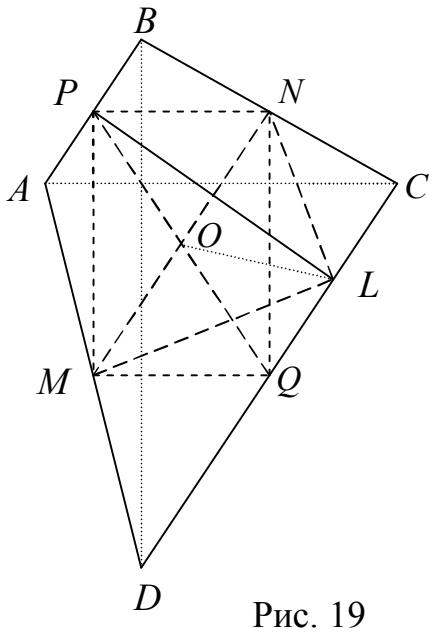

Рис. 19

Відповідь: $90°$.

3. Перепишемо нашу рівність у такий спосіб:

$$\tfrac{q}{p-1} - \tfrac{q}{p} = \tfrac{r}{p} - \tfrac{r}{p+1} + \tfrac{1}{p} \Leftrightarrow \tfrac{q}{p(p-1)} = \tfrac{r}{p(p+1)} + \tfrac{1}{p} \Leftrightarrow \tfrac{q}{p-1} = \tfrac{r}{p+1} + 1 \Leftrightarrow q = \tfrac{(p-1)r}{p+1} + p - 1$$

$$\Leftrightarrow q = p + r - 1 - \frac{2r}{p+1}. \quad (1)$$

Оскільки p, q, r – прості, то число $\frac{2r}{p+1}$ – натуральне. Число $2r$ має всього чотири дільники: 1, 2, r та $2r$. Оскільки $p+1 \geq 3$, тому можливі лише два випадки: $p+1=r$ або $p+1=2r$.

1) Нехай $p+1=r$, тобто $p=r-1$. Оскільки єдина пара послідовних простих чисел – це 2 та 3, то $p=2$ та $r=3$. Тоді з **(1)** знаходимо, що $q=2$. Перевірка показує, що трійка простих чисел $p=q=2, r=3$ є шуканою.

2) Нехай $p+1=2r$, тобто $p=2r-1$. Тоді з **(1)** знаходимо, що $q=3r-3 \vdots 3$, оскільки q – просте, то $q=3$. Далі, послідовно знаходимо, що $r=2, p=3$. Перевірка показує, що трійка простих чисел $p=q=3, r=2$ є шуканою

Відповідь: $p=q=2, r=3$ та $p=q=3, r=2$.

4. Зрозуміло, що програє той, хто вимушений провести хорду з точки, з якої вже проведена інша хорда (рис. 20). Наприклад, один гравець проводить AC, а хорда AB вже була проведена раніше (будемо вважати, що з точки A більше не виходить жодна хорда). Тоді інший гравець просто проведе хорду BC і переможе. Зрозуміло, що цю хорду провести можна, бо якщо б BC перетинала деяку іншу хорду, наприклад, MN, то одна з точок, нехай M, належить дузі $\cup BC$, а інша – ні. Тобто, точка N попадає або на дугу $\cup AB$, і тоді MN перетинає AB, або на дугу $\cup AC$, і тоді MN перетинає AC.

Таким чином гра триватиме доти, доки один з гравців не буде вимушений провести другу хорду з однієї точки і програє. Тобто спочатку обидва гравці будуть проводити лише хорди, які з'єднують «вільні» точки, тобто точки, з яких не проведена жодна хорда. У кожний момент усі вільні точки розбиваються на «групи», всередині кожної з яких можна з'єднати будь-які дві точки. При цьому подальше проведення хорд всередині групи не залежить від інших груп і не впливає на інші групи. Тобто позицію після кожного ходу можна записати списком груп, за кількістю вільних точок в ній. Якщо наступна хорда проводиться в групі, що містила m точок, то на місті старої групи з'являються дві групи, що містять m_1 та m_2 вершин, де $m_1 + m_2 = m - 2$ (при цьому одна чи обидві групи можуть бути порожніми). Таким чином початкову позицію для $N=15$ можна записати як (15), а після проведення першої хорди може утворитись, наприклад, така позиція $(10;3)$, $(8;5)$, або

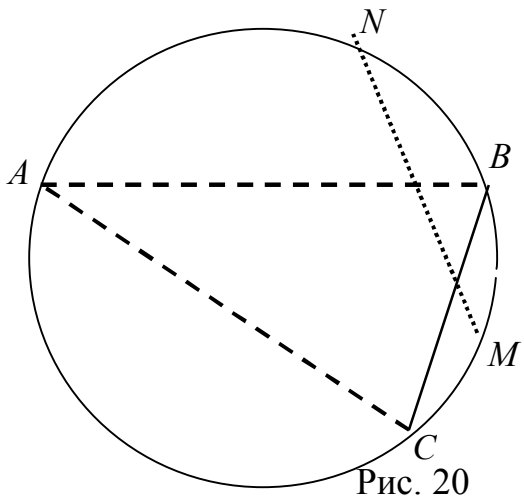

Рис. 20

$(13;\ 0)$ тощо. Після наступного ходу будуть вже 3 групи, при цьому групи з (0) та (1) можна не враховувати, бо в них не можна провести хорду, яка не веде до поразки.

Покажемо тепер прості властивості груп точок, які пришвидшать процес аналізу поточної ситуації.

Властивість 1. У групі з 3 точок завжди можна провести 1 хорду, у групі з 5 точок завжди можна провести 2 хорди.

Властивість 2. У групі з 4 точок той, хто проводить хорду в середині цієї групи може вибрати будь-який з двох варіантів розбиття: $(1;\ 1)$ чи $(2;\ 0)$, тобто там можна провести або 1, або 2 хорди, в залежності від ходу цього гравця.

Властивість 3. У групі з 6 точок той, хто проводить хорду в середині цієї групи може вибрати один з таких варіантів розбиття: $(2;\ 2)$ чи $(3;\ 1)$, тобто там можна провести або 3, або 2 хорди.

Властивість 4. Якщо виникає симетрична ситуація (тобто групи точок можна розбити на пари з рівними кількостями точок в них), то перемагає той, хто зробив хід в таку симетричну ситуацію.

Доведення цих властивостей майже очевидне і проводиться простим перебором. Дамо пояснення до властивості 4. Якщо після ходу одного з гравців маємо ситуацію $(k;\ k)$, то він перемагає, використовуючи симетричні ходи по відношенню до ходів супротивника. Можливі інші симетричні ситуації, але вони є аналогічними за суттю.

Домовимось у подальшому не вказувати групи (1) та (0), бо вони не впливають на подальший хід гри.

а) Андрій перемагає завдяки ходу $(6;\ 6)$, звідки з властивості 4 випливає його перемога завдяки подальшій симетричній стратегії.

б) Олеся перемагає. Подивимось на можливі перші ходи Андрія.

Варіант 1. (13): Олеся перемагає завдяки ходу $(8;\ 3)$. Подивимось на можливі відповіді Андрія.

Варіант 1.1. (8): (фактично це був хід $(8;\ 1;\ 0)$ але дві останні групи ми не вказуємо). Тоді Олеся ходить $(3;\ 3)$ і перемагає завдяки симетричній стратегії.

Варіант 1.2. $(3;\ 6)$: Оскільки є група (3), де можливий 1 хід, та група (6), де Олеся може вибрати скільки ходів триватиме гра, то вона розбиває належним чином групу (6). А саме, вона повинна зробити хід в позицію $(3;\ 6) \to (3;\ 3)$.

Варіант 1.3. $(3;\ 5)$: гра триває точно 3 ходи, останньою ходить Олеся і перемагає.

Варіант 1.4. $(3;\ 4;\ 2)$: завдяки групі (4) Олеся перемагає. Вона повинна залишити групи $(2,3)$.

Варіант 1.5. $(3;\ 3;\ 3)$: очевидно, що Олеся перемагає.

Варіант 2. $(12) \to (5;\ 5)$ і перемагає Олеся. Варіант 3. $(11;\ 2) \to (8;\ 2)$.

У Андрія є такі варіанти ходу: $(6;\ 2)$, Олеся ходить в $(3;\ 2)$ і виграє.

$(5;\ 2)$, залишилось рівно три ходи, Олеся виграє.

$(4;\ 2;\ 2)$, Олеся ходить в групі, де 4 точки в $(2;\ 2)$ і виграє.

$(3;\ 2;\ 2)$, залишилось рівно три ходи, Олеся виграє.

Варіант 4. $(10;\ 3) \to (5;\ 3;\ 3)$ і гра триватиме ще 4 ходи, перемагає Олеся.

Варіант 5. $(9;\ 4) \to (9)$. Далі можливі декілька підваріантів, які легко приводять до перемоги Олесі. $(9) \to (7) \to (5)$, або $(9) \to (6) \to (2;\ 2)$, або $(9) \to (4;\ 3) \to (2;\ 3)$.

Варіант 6. $(8;\ 5) \to (5;\ 5)$.

Варіант 7. $(7;\ 6) \to (7;\ 3)$ У Андрія є такі варіанти ходу: (7), Олеся ходить в (5) і виграє.

$(5;\ 3)$, залишилось рівно три ходи, Олеся виграє.

$(3;\ 2;\ 2)$, залишилось рівно три ходи, Олеся виграє.

Відповідь**:** а**)** перемагає Андрій, б) перемагає Олеся.

9 КЛАС

1. Підставимо у рівність $b^2 = ac$ замість $c = \frac{a+b}{2}$ і матимемо:

$$b^2 = a \cdot \tfrac{a+b}{2} \ \Leftrightarrow\ 2b^2 = ba + a^2 \ \Leftrightarrow\ (b-a)(2b+a) = 0.$$

Виберемо, наприклад, $b = 2$, тоді $a = -4$, звідси $c = -1$ і одержана трійка різних чисел умови задовольняє.

Відповідь: не обов'язково.

2. Розглянемо паралельний перенос на вектор $\overrightarrow{A_1A}$ (рис. 21).

Тоді AA_1CC_3 – паралелограмам, $CC_1C_2C_3$ – ромб.

$\angle C_1CC_3 = \angle C_1FA = \angle CFA_1 = 2\alpha$, звідси

$\angle C_1AC_3 = 180° - \angle ABC = 180° - \frac{1}{2}\angle CFA_1 = 180° - \alpha$. Тепер якщо побудувати коло з центром у точці C, то центральний кут $\angle C_1CC_3 = 2\alpha$, тому вписаний кут, що спирається на дугу C_1C_3, дорівнює α, тому точка A лежить на цьому ж колі. Звідси $AC = CC_3 = AA_1$, що й треба було довести.

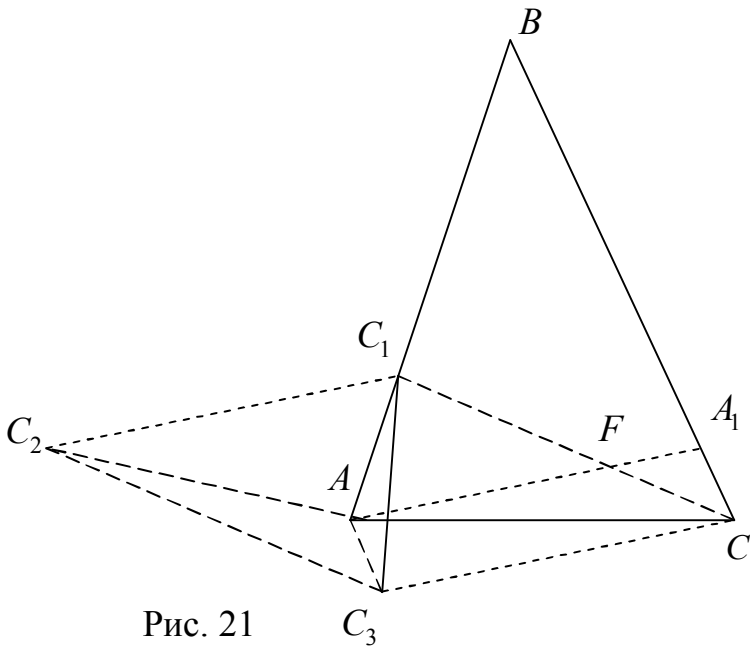

Рис. 21

Альтернативне розв'язання. Проведемо пряму l, що є бісектрисою вертикальних кутів A_1FC та C_1FA. Нехай ця пряма перетинає відрізки AC_1 та CA_1 у точках P та Q відповідно (рис. 22).

Оскільки за умовою $\angle CFA_1 = 2\angle ABC$, то $\angle QFA_1 = \angle PBA_1$. Це означає, що чотирикутник PBA_1F є

вписаним. Аналогічно є вписаним також чотирикутник QBC_1F. Для того, щоб виконувалась рівність $AA_1 = AC$ необхідно й достатньо, щоб виконувалась рівність кутів $\angle AA_1C = \angle ACA_1$. Оскільки чотирикутник PBA_1F є вписаним, то $\angle AA_1C = \angle QPB$. Тобто нам достатньо довести, що $\angle ACB = \angle BPQ$. Ця рівність кутів рівносильна тому, що трикутники ABC і QBP є подібними, тобто що $\frac{AB}{BC} = \frac{QB}{BP}$. Знову скористаємось тим, що чотирикутник PBA_1F є вписаним. За теоремою про добуток відрізків січних $AP \cdot AB = AF \cdot AA_1$. Аналогічно $CQ \cdot CB = CF \cdot CC_1$. Розділимо першу рівність на другу і отримаємо, що має місце рівність $\frac{AF}{CF} = \frac{AP}{CQ} \cdot \frac{AB}{BC}$ (ми скористались тим, що $AA_1 = CC_1$).

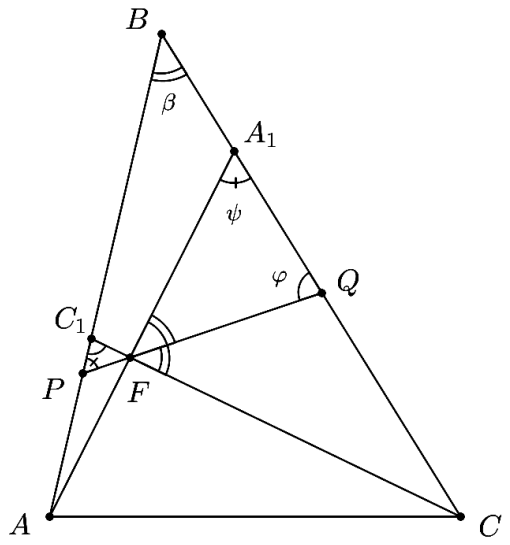

Рис. 22

Тепер нам достатньо довести, що $\frac{AF}{CF} = \frac{AP}{CQ} \cdot \frac{QB}{BP} \Leftrightarrow \frac{QB}{BP} = \frac{AF}{PA} \cdot \frac{CQ}{CF}$. Позначимо $\angle ABC = \angle QFC = \angle PFA = \beta$, $\angle FQB = \angle FC_1A = \varphi$, $\angle FPB = \angle FA_1C = \psi$. За теоремою синусів для трикутника QBP маємо $\frac{QB}{BP} = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}$. За теоремою синусів для трикутника FQC маємо $\frac{CQ}{CF} = \frac{\sin\beta}{\sin(180°-\varphi)} = \frac{\sin\beta}{\sin\varphi}$. За теоремою синусів для трикутника FPA маємо $\frac{AF}{PA} = \frac{\sin(180°-\psi)}{\sin\beta} = \frac{\sin\psi}{\sin\beta}$. Звідси маємо, що $\frac{QB}{BP} = \frac{AF}{PA} \cdot \frac{CQ}{CF} \Leftrightarrow \frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{\sin\psi}{\sin\beta} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\varphi}$, а остання рівність, очевидно є вірною.

3. Нехай p, q, r – прості числа, для яких виконується умова задачі. Якщо $p > 2$, то усі числа p, q, r – непарні, а тому число $A = 3p + 5q$ – парне, а число $B = (r-p)(r-q)(q-p)+1$ – непарне, що суперечить умові задачі. Отже, $p = 2$, тоді за умовою виконується рівність:

$$(r-2)(r-q)(q-2)+1 = 6+5q.$$

Оскільки $p < q < r$, то $r-2 > q-2$ і $r-q \geq 2$. Тому, $6+5q > 2(q-2)^2+1$. Якщо розв'язати останню нерівність, то будемо мати, що $q < 7$. Прості числа, що задовольняють цій нерівності, це $q = 3$ та $q = 5$.

Якщо $q = 3$, то $B = 3p + 5q = 21$ – не є простим числом.

Якщо $q = 5$, то $B = 3p + 5q = 31$ - просте число, тоді повинно $A = (r-2)(r-5)\cdot 3 + 1 = 31$, тобто $r^2 - 7r = 0$, звідки $r = 7$.

Відповідь: $p = 2, q = 5, r = 7$.

4. Зрозуміло що, якщо переставити два стовпчики місцями, то номер середнього не зміниться. Так само буде і з рядками.

Оскільки усього $2k+1=M\cdot N$ – непарне число, то M та N – непарні, покладемо $M=2m+1$, $N=2n+1$. Тоді позначимо середніх у кожному з M рядків $b_1, b_2, ..., b_M$. Шляхом перестановок рядків можемо добитися того, що $b_1<b_2<...<b_M$. Тоді середняком є b_{m+1}. Підрахуємо, вище скількох людей він точно буде. У кожному з $m+1$ перших рядків відповідний b_i є середнім, $i=\overline{1,\,m+1}$, а тому вищим за n людей. Оскільки b_{m+1} вищий за b_i, $i=\overline{1,\,m}$, то разом маємо, що він вищий за $(m+1)n$ та ще m, тобто разом: $mn+m+n$. Тому номер середнього не менший за: $mn+m+n+1=(m+1)(n+1)$.

Тепер треба розв'язати таку задачу – знайти найменше можливе значення добутку $(m+1)(n+1)$, за умови, що $2k+1=(2m+1)(2n+1)$. Позначимо $\sqrt{2k+1}=k_1$, розглянемо такі дві пари чисел $(m,\,n)$ та $(m_1,\,n_1)$, що задовольняють умови: $2k+1=(2m+1)(2n+1)$, $2k+1=(2m_1+1)(2n_1+1)$ та $1\le 2m+1<2m_1+1\le 2n_1+1<2n+1\le 2k+1$. Покладемо

$2m+1=\frac{k_1}{a}$, $2n+1=k_1a$, $2m_1+1=\frac{k_1}{b}$, $2n_1+1=k_1b$, $a>b\ge 1$.

Тоді $2m+2=\frac{k_1}{a}+1$, $2n+2=k_1a+1$, $2m_1+2=\frac{k_1}{b}+1$, $2n_1+2=k_1b+1$, порівняємо такі вирази:

$$(m+1)(n+1)-(m_1+1)(n_1+1)=\tfrac{1}{4}\big((2m+2)(2n+2)-(2m_1+2)(2n_1+2)\big)=$$
$$=\tfrac{1}{4}\Big(\Big(\tfrac{k_1}{a}+1\Big)(k_1a+1)-\Big(\tfrac{k_1}{b}+1\Big)(k_1b+1)\Big)=\tfrac{1}{4}\Big(k_1^2+k_1\Big(\tfrac{1}{a}+a\Big)+1-k_1^2-k_1\Big(\tfrac{1}{b}+b\Big)-1\Big)=$$
$$=\tfrac{k_1}{4}\Big((a-b)-\Big(\tfrac{1}{b}-\tfrac{1}{a}\Big)\Big)=\tfrac{k_1}{4}\Big((a-b)-\tfrac{a-b}{ab}\Big)=\tfrac{k_1}{4}(a-b)\tfrac{ab-1}{ba}>0.$$

Таким чином найменше значення набувається для випадку, коли ці множники найближчі один до іншого.

б) Якщо $2k+1=(2i+1)^2$, то найближчі дільники – рівні, це $(2i+1)$ та $(2i+1)$, і найменший номер для середняка i^2. Якщо $(2k+1)$ не є повним квадратом, то дільників парна кількість, і можемо виписати усі дільники числа $2k+1$ у порядку зростання: $1=d_1<d_2<...<d_{2l}=2k+1$. Тоді симетрично розташовані дільники як раз дають у добутку число $2k+1$. Таким чином шуканими є $d_l=2j+1$ та $d_{l+1}=2t+1$, і шуканим номером є $(j+1)(t+1)$.

а) Якщо $2k+1=2015=5\cdot 13\cdot 31$, то дільники можна виписати таким чином:

$1<5<13<31<65<155<403<2015$.

Середні – це $31=15\cdot 2+1$ та $65=32\cdot 2+1$, тому шуканий номер середнього – це

$(15+1)\cdot(32+1)=528$.

Відповідь: *а*) 528; *б*) найменший номер $(m+1)(n+1)$, де $2k+1=(2m+1)(2n+1)$, при цьому множники є найближчими один до іншого серед усіх можливих.

10 КЛАС

1. Зрозуміло, що число є тим більшим, чим більше має цифр. Оскільки кожна цифра дорівнює мінімум 1, то максимальна кількість цифр може бути 2015. Таке число єдине: $\underbrace{11...1}_{2015}$, оскільки $111111 = 15873 \cdot 7$, $11111 \not\vdots 7$ та $2015 = 335 \cdot 6 + 5$, то це число на 7 не ділиться.

Шукане число не може мати 2014 цифр, оскільки сума 2014 непарних чисел не може дорівнювати непарному числу.

Таким чином шукане найбільше число може мати максимум 2013 цифри. Очевидно, що воно повинно мати 2012 цифр 1 та одну цифру 3, ніякі інші варіанти неможливі. Знайдемо найбільше число такої структури, яке кратне 7. Це означає, що треба знайти таке число з цифрою 3 у найбільшому можливому розряді. Тобто шукане число має такий вигляд: $A = \underbrace{11...1}_{2013} + 2 \cdot 10^k$, де $k \le 2012$, при цьому A повинно ділитись на 7 та k – максимальне можливе.

Оскільки $A = \underbrace{11...1}_{2010}1000 \vdots 7$, бо $2010 = 335 \cdot 6$ та $111111 \vdots 7$, то повинно ділитись на 7 ось таке число: $B = 111 + 2 \cdot 10^k$. Оскільки $111 \equiv 6 \pmod 7$, то повинно бути виконано $2 \cdot 10^k \equiv 1 \pmod 7$. Розглянемо періодичність остач таких чисел за модулем 7 (не забудемо, що $10 \equiv 3 \pmod 7$):

$2 \cdot 10^0 \equiv 2 \pmod 7$, $2 \cdot 10^1 \equiv 6 \pmod 7$, $2 \cdot 10^2 \equiv 4 \pmod 7$, $2 \cdot 10^3 \equiv 5 \pmod 7$, $2 \cdot 10^4 \equiv 1 \pmod 7$, $2 \cdot 10^5 \equiv 3 \pmod 7$, $2 \cdot 10^6 \equiv 2 \pmod 7$, ...

і далі за циклом таким чином шукані значення для k треба шукати у вигляді $k = 6l + 4$. Оскільки $2010 = 335 \cdot 6$, то найбільше можливе значення для $k = 334 \cdot 6 + 4 = 2008$, відповідно до цього шукане найбільше число – це $1111311\underbrace{1...1}_{2008}$.

Відповідь: $1111311\underbrace{1...1}_{2008}$.

2. *а*) Без обмеження загальності будемо вважати, що Олеся не вибрала картку з числом a. Тоді точка $(a; a)$ не зможе бути пофарбованим. Дійсно, Олеся його не фарбує, бо у цієї точки перша координата a, а Андрій не фарбує, бо у цієї точки друга координата a.

б) Якщо є однакове число, наприклад 1, яке було не вибране обома, то точка (1, 1) не може бути зафарбованим ні Олесею, ні Андрієм (бо перша координата 1), ні Оксаною, бо друга координата 1.

Нехай тепер усі картки в наборах, що не обрані Олесею та Андрієм – попарно різні. Звідси зрозуміло, що кожне з чисел від 1 до 2015 було обрано принаймні одним з двох. Покажемо, що за таких умов усі точки будуть зафарбовані.

Розглянемо точку $(a; b)$ і можливі випадки.

a – серед обраних Олесею, b – Андрієм. Тоді цю точку фарбує Олеся.

Якщо b – Андрієм не обране, то його обрала Олеся та воно дісталося Оксані. Якщо a – серед обраних і Андрієм, то $(a; b)$ фарбує Андрій. Якщо ні, то a дісталися Оксані і Олесі, бо його не обрав Андрій, тому $(a; b)$ фарбує Оксана.

a – немає серед обраних Олесею, тому воно є у Андрія та Оксани. Якщо b є у Олесі, то $(a; b)$ фарбує Оксана, якщо його у Олесі немає, то воно є у Оксани і точку $(a; b)$ фарбує Андрій.

Твердження доведене.

Відповідь: *б*) на усіх картках, що не вибрали Олеся та Андрій усі числа різні.

3. Проведемо третю висоту CC_1 (рис. 23), навколо чотирикутника AB_1HC_1 можна описати коло, тому $\angle A = 180° - \angle C_1HB_1 = \angle B_1HC$. Оскільки $\Delta B_1HC = \Delta NHC$, тому $\angle A = \angle CHN$. Навколо чотирикутників HA_1NC та AC_1A_1C можна описати кола, оскільки $\angle HA_1C = 90°$, $\angle HNC = 90°$, $\angle AC_1C = 90°$. Звідси, $180^0 - \angle C_1A_1C = \angle BAC = \angle CHN = \angle CA_1N \Rightarrow$ точки C_1, A_1 та N лежать на одній прямій. Оскільки BA_1HC_1 – вписаний, то $\angle HC_1A_1 = \angle HBA_1$, але ж $\angle A_1BK = \angle HBA_1$. Оскільки точки C, C_1, B, K лежать на одному колі, то $\angle CBK = \angle KC_1C$, звідки випливає, що точки C_1, A_1 та K лежать на одній прямій.

Оскільки точки C_1 та A_1 – різні, то усі чотири точки C_1, A_1, N та K лежать на одній прямій, що й треба було довести.

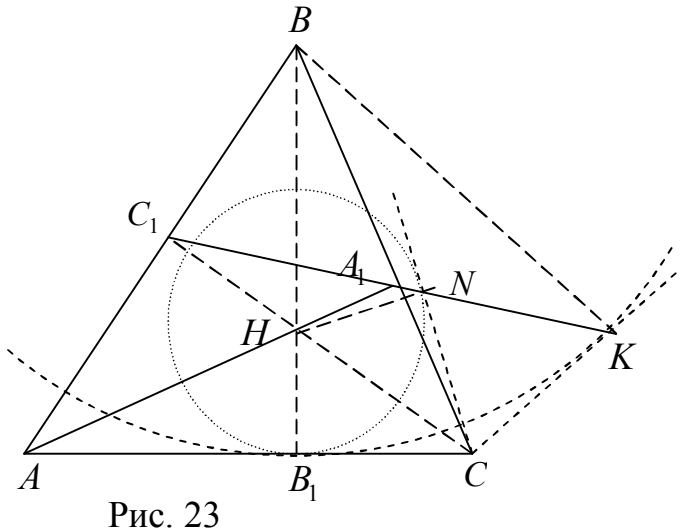

Рис. 23

4. Припустимо, що існує $a \neq 0$, для якого $f(a) = f(0) = b$. Тоді у початкове рівняння, яке позначимо (0), зробимо такі підстановки.

Спочатку $y = 0$:

$$4f(x+b) = f(x) + b + b + 1 \qquad (1)$$

Тепер у (0) підставимо $y = a$: $4f(x+b) = f(x) + b + f(xa) + 1$. **(2)**

Якщо їх порівняти **(1)** та **(2)**, матимемо, що $f(ax) = b$, звідки шукана функція константа. Якщо $f(x) = b$ підставити у початкове рівняння, матимемо, що $4b = 3b + 1$, звідки із сталих функцій умову задовольняє функція $f(x) \equiv 1$. Інакше, з умови $f(a) = f(0)$ випливає, що $a = 0$.

З симетричності правої частини маємо, що ліва повинна також бути симетричною відносно змінних x, y, тому справджується рівність:

$$f\big(x + f(y)\big) = f\big(y + f(x)\big).$$

Підставимо в це рівняння $x = -f(y)$, тоді матимемо, що

$$f(0) = f\big(-f(y) + f(y)\big) = f\big(y + f(-f(y))\big) \Rightarrow\ y + f(-f(y)) = 0$$

$$f(-f(y)) = -y. \qquad (3)$$

Тепер підставимо у початкове рівняння $x = 1$ та $y = -f(t)$:

$$4f\big(1 + f(-f(t))\big) = f(1) + f(-f(t)) + f(-f(t)) + 1$$

Якщо скористатися умовою **(3)** матимемо, що

$$4f(1-t) = f(1) - t - t + 1. \qquad (4)$$

Покладемо в умові (4) $t = 1 - z$, звідси

$$4f(z) = f(1) - 2(1-z) + 1 = 2z + c_1 \text{ або } f(z) = \tfrac{1}{2}z + c.$$

Підставимо це співвідношення у задане рівняння:

$$4f(x + \tfrac{1}{2}y + c) = 4(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{2}c + c) = 2x + y + 6c = \tfrac{1}{2}x + c + \tfrac{1}{2}y + c + \tfrac{1}{2}xy + c + 1$$

,

яке очевидно не задовольняє умову при усіх можливих x, y.

Відповідь: $f(x) \equiv 1$.

11 КЛАС

1. *а)* Так існують. Нехай $a_1 = p_1^2$, $a_2 = p_2^2$, …, $a_{2015} = p_{2015}^2$, де $p_1 = 2$, p_2, …, p_{2015} – перші 2015 простих чисел. Зрозуміло, що усі вони попарно взаємно прості і $a_1 a_2 ... a_{2015} - 1 = (p_1 p_2 ... p_{2015} - 1)(p_1 p_2 ... p_{2015} + 1)$ – добуток двох непарних послідовних чисел.

б) Так, існують. Нехай тепер $a_1 = p_1^2$, $a_2 = p_2^2$, …, $a_{2015} = p_{2015}^2$, де $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, …, p_{2015} – перші 2015 простих непарних чисел. Зрозуміло, що усі вони попарно взаємно прості і $a_1 a_2 ... a_{2015} - 1 = (p_1 p_2 ... p_{2015} - 1)(p_1 p_2 ... p_{2015} + 1)$ – добуток двох парних послідовних чисел.

Відповідь. а), б) існують.

2. Проведемо третю висоту CC_1 (рис. 24), навколо чотирикутника AB_1HC_1 можна описати коло, тому $\angle A = 180° - \angle C_1HB_1 = \angle B_1HC$. Оскільки $\Delta B_1HC = \Delta NHC$, тому $\angle A = \angle CHN$. Навколо чотирикутників HA_1NC та AC_1A_1C можна описати кола, оскільки $\angle HA_1C = 90°$, $\angle HNC = 90°$, $\angle AC_1C = 90°$.

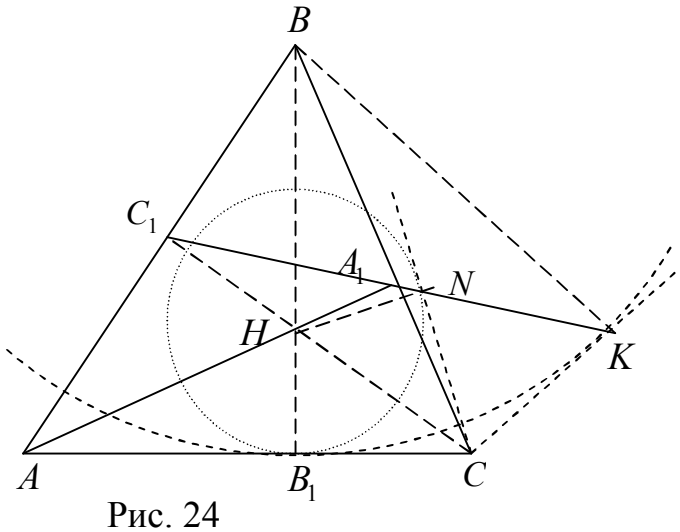

Рис. 24

Звідси, $180^0 - \angle C_1A_1C = \angle BAC = \angle CHN = \angle CA_1N \Rightarrow$ точки C_1, A_1 та N лежать на одній прямій. Оскільки BA_1HC_1 – вписаний, то $\angle HC_1A_1 = \angle HBA_1$, але ж $\angle A_1BK = \angle HBA_1$. Оскільки точки C, C_1, B, K лежать на одному колі, то $\angle CBK = \angle KC_1C$, звідки випливає, що точки C_1, A_1 та K лежать на одній прямій.

Оскільки точки C_1 та A_1 – різні, то усі чотири точки C_1, A_1, N та K лежать на одній прямій, що й треба було довести.

3. При $a=b=1$ послідовність має вигляд (1; 1; 2; 1; 3; 1; 4; 1; 5; 1; …), послідовність (a_n+a_{n+1}) матиме вигляд (2; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 6; 6; 7; …), тому потрібне твердження виконується.

Нехай числа $a_1=a$ та $a_2=b$ не рівні одиниці одночасно. Від перестановки місцями a_1 та a_2 подальші члени послідовності не зміняться, тому вважаємо $a_1\neq 1$. Зрозуміло, що послідовність (a_n) необмежена. Справді, якщо припустити, що її максимальний член дорівнює s, то серед чисел $\{a_1, a_2, ..., a_{s^2+1}\}$ за принципом Діріхле буде $s+1$ однакове, а тому за означенням послідовності число, що йде після останнього з них, буде не меншим за $s+1$, що призводить до суперечності.

Тепер припустимо, що для $n\geq N$ послідовність (a_n+a_{n+1}) є неспадною. Розглянемо $k\geq N+1$ таке, що $a_k=t\geq \max\{a,b\}+1$ і це перша поява числа t в нашій послідовності. Очевидно, що всі числа до цієї позиції строго менші за t. Тоді $a_{k+1}=1$ за означенням і $a_{k-1}=1$ за припущенням неспадності. Це означає, що існує рівно t індексів $\{1<i_1<i_2<...<i_t=k-1\}$, для яких $a_{i_1}=a_{i_2}=...=a_{i_t}=1$. Тоді серед чисел $\{a_{i_1-1}; a_{i_2-1}; ...; a_{i_t-1}\}$ за принципом Діріхле буде принаймні одна пара рівних, оскільки всі вони не перевищують $t-1$. Але тоді в послідовності є дві пари чисел вигляду $\{...,k,1,...\}$, що йдуть поспіль. Це очевидно суперечить умові, бо після другої появи числа k може йти мінімум двійка. Суперечність.

Відповідь: $a=b=1$.

4. Нехай (x, y, z) – деякий розв'язок цієї системи. Побудуємо два многочлени

$$P(t)=(t-x)^3(t-z)=t^4+p_1t^3+q_1t^2+r_1t+s_1 \text{ та}$$
$$Q(t)=(t-y)^2(t-a)(t-b)=t^4+p_2t^3+q_2t^2+r_2t+s_2,$$

розглянемо такий многочлен $f(t)$:

$$f(t)=P(t)-Q(t)=(p_1-p_2)t^3+(q_1-q_2)t^2+(r_1-r_2)t+(s_1-s_2).$$

Коренями полінома $P(t)$ є числа x, x, x, z, а $Q(t)$ – числа y, y, a, b. За теоремою Вієта для полінома четвертої степені ми маємо такі рівності:

$$p_1=-(3x+z)=-(2y+(a+b))=p_2$$
$$q_1=3x^2+3xz=y^2+2(a+b)y+ab=q_2$$
$$r_1=-(x^3+3x^2z)=-(y^2(a+b)+2yab)=r_2$$

Таким чином $f(t)=(s_1-s_2)=C=\text{const}$. Висновок: графіки цих двох функцій одержані зсувом вздовж вертикальної осі на деяку сталу C. Зрозуміло, що $P'(t)=(t-x)^2(4t-3z-x)\equiv Q'(t)=(t-y)\left(4t^2-(3a+3b+2y)t+2ab+y(a+b)\right)$.

Підставимо у квадратний тричлен

$R(t)=4t^2-(3a+3b+2y)t+2ab+y(a+b)$ значення $t_0=\frac{1}{2}(a+b)$ і одержимо, що

$$R(t_0) = (a+b)^2 - 3(a+b)\tfrac{a+b}{2} - 2y\tfrac{a+b}{2} + 2ab + y(a+b) =$$
$$-\tfrac{(a+b)^2}{2} + 2ab = -\tfrac{(a-b)^2}{2} < 0.$$

Тобто цей квадратний тричлен має два різних корені, тому його дискримінант додатний. Але в нас має місце тотожності $P'(t) \equiv Q'(t)$ (бо ці многочлени відрізняються на деяку сталу) та $P'(t)$ має $t = x$ коренем кратності 2. Тоді у многочлена $Q'(t)$ також $t = x$ – корінь кратності 2. Оскільки $R(t)$ має два різних корені, то рівно один з них співпадає з x, й $y = x$. Крім того $R(y) = 0$, тобто

$$R(y) = 4y^2 - (3a+3b+2y)y + 2ab + y(a+b) = 2\left(y^2 - (a+b)y + ab\right) = 0,$$

що можливо лише при умові $y = a$ або $y = b$. Таким чином остаточно маємо, що

$$f(t) = P(t) - Q(t) = (t-x)^3(t-c) = C,$$

де $c = a$ або $c = b$. Але це можливе лише при умові $z = c$. Звідси випливає, що ці многочлени співпадають і ми маємо два розв'язки:

$$x = y = a,\ z = b \text{, або } x = y = b,\ z = a.$$

Другу частину можна також довести за допомогою теореми Ролля.

Розглянемо многочлен $Q(t) = (t-y)^2(t-a)(t-b)$.

Припустимо, що усі значення y, a, b попарно різні, тоді похідна $Q'(t)$ має три різні корені, оскільки $t = y$ є кратним коренем многочлена, а також по одному кореню знаходиться на проміжках між числами y, a, b в залежності від їх величини.

Але $P'(t)$ тотожньо співпадає з $Q'(t)$, тому він також повинен мати три різні корені, а він має корінь $t = x$ кратності 2.

Одержана суперечність показує, що не усі числа y, a, b є різними. Оскільки за умовою числа a, b – різні то можлива ситуація, або $y = a$, або $y = b$. Оскільки вони аналогічні, то розглянемо спочатку, що $y = a$.

Тоді $Q(t) = (t-y)^3(t-b)$, і кубічний многочлен $Q'(t)$ має $t = y$ – корінь кратності 2, а тотожньо рівний йому кубічний многочлен $P'(t)$ має корінь $t = x$ кратності 2, звідси $x = y$, і ми маємо таку рівність:

$$C = (t-x)^3(t-z) - (t-x)^3(t-b) = (t-x)^3(z-b),$$

яка можлива лише за умови $z = b$.

Таким чином у цьому випадку ми маємо, що система має такий розв'язок: $x = y = a,\ z = b$.

У іншому випадку повністю аналогічно ми маємо другий розв'язок системи: $x = y = b,\ z = a$.

Відповідь. $x = y = a$, $z = b$ та $x = y = b$, $z = a$.

ЗВІТ ПРО ПРОВЕДЕННЯ ІІІ ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ УЧНІВСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ, 2014-2015 Н.Р.

Відомості про учасників олімпіад:

Сумська область

Кількість навчальних закладів, учні яких брали участь в І етапі олімпіади			Класи	Кількість учасників олімпіади за етапами									Кількість переможців ІІІ етапу за ступенями дипломів		
				І			ІІ			ІІІ					
міських	сільських	спеціалізованих		міських	сільських	спеціалізованих	міських	сільських	спеціалізованих	міських	сільських	спеціалізованих	І	ІІ	ІІІ
112	243	52	6	1087	1017	515	168	145	68	–	–	–	–	–	–
113	242	50	7	1035	1003	458	116	123	69	4	6	11	1	3	6
112	262	56	8	994	1022	435	103	116	79	4	3	11	1	2	6
119	256	53	9	951	1031	405	140	102	63	3	5	12	1	3	6
103	164	49	10	850	642	379	98	50	66	4	3	14	1	2	7
107	178	47	11	627	611	368	84	50	56	–	3	9	1	2	3
			Разом	5544	5376	2560	714	586	401	15	20	57	5	12	28

Директор Департаменту освіти і науки,
голова оргкомітету олімпіади О. І. Попова
Голова журі олімпіади О.С. Чашечникова

Підписи наявні в оригіналі

02 березня 2015 року

АНАЛІТИЧНИЙ ЗВІТ З ПРОВЕДЕННЯ І, ІІ, ІІІ ЕТАПІВ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ УЧНІВСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ

Відповідно до Положення про Всеукраїнські учнівські олімпіади, турніри, конкурси з навчальних предметів, конкурси-захисти науково-дослідницьких робіт, олімпіади зі спеціальних дисциплін та конкурси фахової майстерності (наказ Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України від 22.09.2011 № 1099, зареєстровано в Міністерстві юстиції України 17.11.2011 за № 1318/20056), на виконання наказу Міністерства освіти і науки України від 08.08.2014 №918 «Про проведення Всеукраїнських учнівських олімпіад і турнірів з навчальних предметів у 2014-2015 навчальному році» та наказу управління освіти і науки Сумської обласної державної адміністрації від 14.11.2014 № 566-ОД «Про проведення ІІІ етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад та участь команд учнів Сумської області у IV етапі Всеукраїнських учнівських олімпіад у 2014-2015 навчальному році», ІІІ етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики проведено 24-25 січня 2015 року на базі Сумського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти.

	Міські ЗОШ	Сільські ЗОШ	Спеціалізовані	Усього
Брали участь у І етапі олімпіади	5544	5376	2560	13525
Брали участь у ІІ етапі олімпіади	714	586	401	1701
Брали участь у ІІІ етапі олімпіади	15	20	57	92

У ньому взяли участь 92 учні (згідно з рейтингом команд – 104 учня) 7-11 класів з усіх районів та міст області (окрім Недригайлівського та Ямпільського), з них 21,7% – учні сільських шкіл, 16,3% – учні міських шкіл, 62% – учні спеціалізованих навчальних закладів.

У розрізі класів:

- 7 клас – 21 учень;
- 8 клас – 18 учнів;
- 9 клас – 20 учнів;
- 10 клас – 21 учень;
- 11 клас – 12 учнів.

У порівнянні з минулим роком кількість учасників ІІІ етапу зменшилася на 8 учнів.

Загальноосвітні навчальні заклади представлені 35 учнями, що складає 38%, спеціалізовані школи, ліцеї та гімназії – 57 учнями (62%).

У порівнянні з минулим роком спостерігається тенденція до зростання кількості переможців серед учнів спеціалізованих навчальних закладів.

Інтернатні навчальні заклади представлені 4 учнями Сумської обласної гімназії-інтернату для талановитих та творчо обдарованих дітей Сумської обласної ради та 4 учнями Державного ліцею-інтернату з посиленою військово-фізичною підготовкою «Кадетський корпус» імені І.Г. Харитоненка.

Найчисельніші команди: м. Суми – 15 учасників, м. Шостки – 10 учасників, м. Конотоп – 9 учасників.

Слід зазначити, що кількість учасників І етапу зменшилася на 101 учень, ІІ етапу зменшилася відповідно на 375 учасників у порівнянні з минулим роком.

За підсумками змагань 45 учнів визнано переможцями ІІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики:

- 7 клас – 10 учнів;
- 8 клас – 9 учнів;
- 9 клас – 10 учнів;
- 10 клас – 10 учнів;
- 11 клас – 6 учнів.

Дипломами І ступеню відзначено 5 учнів, ІІ ступеню – 12 учнів, ІІІ ступеню – 28 учнів, з них представники загальноосвітніх навчальних закладів –8 учнів (17,8%) (4 – учні сільських шкіл, 4 – міських), 37 (82,2%) – учні спеціалізованих навчальних закладів.

Найкращі результати: 100% результативність має команда Конотопського району – 2 призових місця (2 учасника), команда м. Шостки – 90% (9 призових місць, 10 учасників), команда м. Суми – 86,7% (13 призових місць, 15 учасників).

Слід зазначити, що команда м. Шостки представлена учнями Шосткинського навчально-виховного комплексу: спеціалізована школа І-ІІ ступенів-ліцей Шосткинської міської ради.

За результатами виконання завдань учасниками команди м. Суми 5 призових місць (І ступеню – 1 диплом, ІІ ступеню – 2 дипломи, ІІІ ступеню – 2 дипломи) вибороли учні Сумської спеціалізованої школи І-ІІІ ступенів № 10 ім. Героя Радянського Союзу О. Бутка, 4 призових місця (І ступеню – 1 диплом, ІІ ступеню – 1 диплом, ІІІ ступеню – 2 дипломи) – вибороли учні Олександрівської гімназії Сумської міської ради, по одному

призовому місцю вибороли учні: Сумської гімназії №1 – диплом ІІІ ступеню, Сумської спеціалізованої школи І-ІІІ ступенів №17 – диплом І ступеню, Сумської загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів № 27 – диплом ІІ ступеню.

Команда Кролевецького району здобула 4 призових дипломи (ІІ ступеню – 2 дипломи, ІІІ ступеню – 2 дипломи), результативність виступу – 80%.

Команда м. Конотоп здобула 5 призових дипломів (ІІ ступеню – 2 дипломи, ІІІ ступеню – 3 дипломи), результативність виступу – 55,6%, збільшилася у порівнянні з минулим роком.

Успішні виступи учнів у цих навчальних закладах є результатом якісно організованої допрофільної підготовки, впровадження профільного навчання, у поєднанні з ефективною системою роботи з обдарованими дітьми.

Результативно виступили в цьому році команди Липоводолинського (66,7%), Середино-Будського (66,7%), Тростянецького (66,7%) районів, Білопільського (50%), м. Лебедин (33,3%), м. Охтирка (33,3%), м. Ромни (25%).

Значно знизилася результативність Сумської обласної гімназії-інтернату для талановитих та творчо обдарованих дітей Сумської обласної ради (на 50% – 1 призове місце в порівнянні з 3 місцями минулого року), команди Державного ліцею-інтернату з посиленою військово-фізичною підготовкою «Кадетський корпус» імені І.Г. Харитоненка (на 25% – 1 призове місце).

Не в усіх районах області приділяється належна увага організації роботи з обдарованими та талановитими учнями. Цього року учні Недригайлівського та Ямпільського районів взагалі не брали участь у ІІІ етапі Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики.

Останні чотири роки за результатами ІІІ етапу олімпіади з математики відсутні переможці у Глухівському, Лебединському, Охтирському районах, три роки немає переможців у місті Глухів та в Сумському, Шосткинському районах, два роки відсутні переможці в Буринському та Роменському районах, у цьому році відсутні переможці у Путивльському районі.

Співвідношення кількості переможців (дипломи І-ІІІ ступенів) до кількості учасників (дипломи учасників):

№	Райони	Кількість учасників	Кількість переможців	Результативність (%)
1	Білопільський	2	1	50
2	Буринський	2	0	0
3	В-Писарівський	1	0	0
4	Глухівський	2	0	0
5	Конотопський	2	2	100
6	Краснопільський	2	0	0
7	Кролевецький	5	4	80
8	Лебединський	2	0	0
9	Л-Долинський	3	3	66,7
10	Недригайлівський	-	-	-
11	Охтирський	1	0	0
12	Путивльський	2	0	0
13	Роменський	3	0	0
14	С-Будський	3	2	66,7
15	Сумський	3	0	0
16	Тростянецький	3	2	66,7
17	Шосткинський	2	0	0
18	Ямпільський	-	-	-
19	м. Суми	15	13	86,7
20	м. Глухів	2	-	0
21	м. Конотоп	9	5	55,6
22	м. Лебедин	3	1	33,3
23	м. Охтирка	3	1	33,3
24	м. Ромни	4	1	25
25	м. Шостка	10	6	60
26	Сумська обласна гімназія-інтернат для талановитих та творчо обдарованих дітей	4	1	25
27	Державний ліцей-інтернат з посиленою військово-фізичною підготовкою «Кадетський корпус» імені І.Г. Харитоненка	4	1	25
28	ПТНЗ	1	0	0

Нестабільні показники виступу команд районів свідчать про відсутність системного підходу в організації роботи вчителів математики зі здібними та обдарованими учнями, глибокого аналізу результатів попередніх олімпіад, низький рівень підготовки, організації та проведення І, ІІ етапів Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики.

Аналізуючи виконання завдань ІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, слід зазначити, що найкраще впоралися з завданнями учні 6, 7 класів, бо здебільшого це завдання логічного характеру і не вимагають знання спеціальних методів та прийомів розв'язання олімпіадних задач. Учні 8-11 класів потребують спеціальної підготовки, знання програмового матеріалу не є запорукою успішного виконання завдань.

Учасники ІІ етапу олімпіади повинні впевнено володіти не тільки методами розв'язування задач підвищеної складності, безпосередньо пов'язаних зі змістом шкільної програми (нестандартні рівняння, системи рівнянь, нерівності, побудова графіків функцій, зображення на координатній площині множин, визначених певними умовами, тригонометричні задачі тощо), а й спеціальними методами та прийомами розв'язування олімпіадних задач (для відповідних вікових груп), додатковими теоретичними знаннями, передбаченими програмами факультативних курсів, математичних гуртків, усталеною практикою проведення в Україні інтелектуальних математичних змагань.

Викликає занепокоєння той факт, що звіти про проведення ІІ (районного) етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики та заявки на участь у ІІІ (обласному) етапі надсилаються з помилками (м. Суми, м. Ромни, м. Охтирка, Буринський, Сумський райони), Державний ліцей-інтернат з посиленою військово-фізичною підготовкою «Кадетський корпус» імені І.Г. Харитоненка.

Учнів-переможців ІІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики підготували 35 учителів математики, серед яких:

– учителів вищої категорії – 28;
– учителів першої категорії – 3;
– учителів другої категорії – 2;
– спеціаліст – 2;

Заслуженими вчителями України є 2 учителя, 10 – учителями методистами, звання «старший вчитель» мають 8 учителів.

Слід зазначити, що найбільше (4) переможців ІІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики підготували:

– Азаренкова Альона Іванівна, учитель математики вищої категорії Сумської спеціалізованої школи І-ІІІ ступенів № 10 ім. Героя Радянського Союзу О. Бутка, учитель-методист, Заслужений учитель України;

– Передрій Жанна Миколаївна, учитель математики вищої категорії Шосткинського навчально-виховного комплексу: спеціалізована школа І-ІІ ступенів – ліцей Шосткинської міської ради, учитель-методист.

З переможця підготувала Бур Олена Василівна, учитель математики вищої категорії Шосткинського навчально-виховного комплексу: спеціалізована школа І-ІІ ступенів – ліцей Шосткинської міської ради Сумської області, учитель-методист, Заслужений учитель України.

2 переможця підготували:

– Панченко Тетяна Іванівна, учитель математики вищої категорії Олександрівської гімназії Сумської міської ради Сумської області, учитель-методист;

– Шаповалова Світлана Григорівна, учитель математики вищої категорії Олександрівської гімназії Сумської міської ради Сумської області, учитель-методист;

– Трач Ольга Олександрівна, учитель математики вищої категорії Шосткинського навчально-виховного комплексу: спеціалізована школа I-II ступенів – ліцей Шосткинської міської ради Сумської області, старший учитель.

Назаренко Олександр Максимович, доцент кафедри моделювання складних систем Сумського державного університету, кандидат фізико-математичних наук, підготував 7 переможців.

Членами журі, до складу якого були залучені наукові працівники Сумського державного педагогічного університету ім. А.С. Макаренка), Сумського державного університету (5 кандидатів фізико-математичних наук, доцентів, 1 кандидат технічних наук, доцент, 1 старший викладач, 1 викладач), 6 учителів вищої категорії, учителів-методистів, було забезпечене об'єктивне оцінювання учнівських робіт. Очолювала роботу журі Чашечникова О.С., доктор педагогічних наук, професор кафедри математики Сумського державного педагогічного університету ім. А.С. Макаренка, експерт-консультант – Ніколаєва К.В., доцент кафедри методики початкової та природничо-математичної освіти Сумського ОІППО, кандидат фізико-математичних наук, доцент.

30.01.2015 відбулося засідання апеляційної комісії III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики у складі Удовиченко І.В., члена оргкомітету, проректора з науково-педагогічної роботи Сумського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти; Чашечникової О.С., голови журі, професора кафедри математики Сумського державного педагогічного університету ім. А.С. Макаренка, доктора педагогічних наук; Ніколаєвої К.В., експерт-консультанта, доцента кафедри методики початкової та природничо-математичної освіти Сумського ОІППО, кандидата фізико-математичних наук; членів журі: Шаповалова С.П., доцента кафедри комп'ютерних наук Сумського державного університету, кандидата фізико-математичних наук та Панченко Т.І., учителя математики вищої категорії Олександрівської гімназії Сумської міської ради, учителя-методиста; Свєтлової Т.В., секретаря журі, методиста математики Сумського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти щодо розгляду апеляційної скарги Похваленної Ольги Олександрівни, учениці 11 класу Сумської гімназії №1 м. Суми Сумської області, в якій учениця просить переглянути оцінювання завдань №1, №2, №4, №6.

Ніколаєва К.В. зазначила, що робота Похваленної Ольги Олександрівни переглянута, проінформувала комісію про виконання завдань та вказала на допущені ученицею помилки у виконаній роботі. У процесі перегляду роботи Похваленна О.О. відмовилась від апеляційних зауважень щодо оцінювання завдань № 1, № 2, погодившись з попередньо оцінкою розв'язаних завдань.

Чашечникова О.С. зазначила, що письмова робота оцінена згідно з критеріями оцінювання учнівських робіт; інформація, подана в апеляційній скарзі щодо розв'язання завдань №4, №6 не відповідає змісту роботи. Загальна кількість балів (12 балів), 5 місце залишити незмінним. Постановили попереднє рішення журі залишити в силі.

Комплект завдань ІІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики орієнтовано на зміст, структуру, обсяг завдань IV етапу зазначеної олімпіади попередніх років з урахуванням рівня складності, тематики матеріалу, вивченого учнями.

Максимальна кількість балів за розв'язання всіх завдань складала в 7 класі – 35 балів, в 8-11 класах – 42 бали.

Ступінь виконання переможцями завдань:

Клас	І місце		ІІ місце		ІІІ місце	
	бали	відсотки	бали	відсотки	бали	відсотки
7	23	65,7%	16-20	45,7-57,1%	12-13	34,3-37,1%
8	36	85,7%	31	73,8%	22-29	52,4-69%
9	39	92,9%	28-32	66,7-76,2%	21-26	50-61,9%
10	27	64,3%	25	59,5%	15-22	35,7-52,4%
11	30	71,4%	20-21	47,6-50%	16-18	38,1-42,9%

Аналізуючи виконання завдань учасниками ІІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, можна зробити висновок, що значна частина учасників олімпіади виявила ґрунтовні знання теорії, вміння застосовувати їх в стандартних та нестандартних умовах, давати правильне теоретичне обґрунтування отриманим результатам.

Найкраще впоралися з виконанням завдань учні 9 класу, низькі бали за роботу відсутні.

Гострою залишається проблема значного розриву у кількості отриманих балів переможцями олімпіад і учасниками, що посіли останні місця у змаганнях.

Найнижчі результати показали учні:

11 клас – із максимальної кількості 42 бали:

– Ігнатьєв Ігор Валерійович, учень Державного ліцею-інтернату з посиленою військово-фізичною підготовкою «Кадетський корпус» імені І.Г. Харитоненка , набрав 3 бали;

– Манжула Богдана Павлівна, учениця Краснопільської гімназії Краснопільської районної ради Сумської області, набрала 3 бали;

– Копатько Євген Вікторович, учень Воронізької загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів ім. П.О.Куліша Шосткинської районної ради Сумської області, набрав 4 бали.

10 клас – із максимальної кількості 42 бали:

– Гвоздецька Альона Олексіївна, учениця Рогинської загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів Роменської районної ради, набрала 4 бали;

– Максимчук Артем Володимирович, учень Державного професійно-технічного навчального закладу «Сумський центр професійно-технічної освіти», набрав 3 бали.

8 клас – із максимальної кількості 42 бали:

– Бондаренко Анастасія Олександрівна, учениця Буринської спеціалізованої школи І-ІІІ ступенів № 2 Буринської міської ради Сумської області, набрала 1 бал;

– Гаврик Аліна Романівна, учениця Охтирської загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів № 1 Охтирської міської ради Сумської області, набрала 4 бали.

7 клас – із максимальної кількості 35 балів:

– Гриценко Дарина Олександрівна учениця Червленівського навчально-виховного комплексу: загальноосвітня школа І-ІІ ступенів – дошкільний навчальний заклад Лебединської районної ради Сумської області, набрала 1 бал;

– Майданевич Євгеній Андрійович, учень Буринської спеціалізованої школи І-ІІІ ступенів № 1 Буринської міської ради Сумської області, набрав 2 бали;

– Хоменко Аліна Володимирівна, учениця Низівської загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів Сумської районної ради Сумської області, набрала 3 бали.

Дані результати свідчать про відсутність системи роботи з обдарованими учнями, низький рівень підготовки учнів до олімпіади з математики, в учнів не сформована компетентність розв'язування олімпіадних завдань, недостатньо уваги приділяється розвитку логічного мислення.

Звертаємо увагу на те, що програма підготовки до олімпіади з математики суттєво відрізняється від шкільної програми, тому вчителям, які готують учнів до

ІІІ етапу олімпіади, необхідно ретельно аналізувати завдання ІІ та ІІІ етапів попередніх олімпіад й обов'язково використовувати їх при підготовці учнів до інтелектуальних змагань.

Аналізуючи результати ІІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики слід зазначити, що учнями допущені помилки, в основному, через неґрунтовне опрацювання окремих олімпіадних тем, незнання деяких математичних методів, способів та прийомів розв'язування нестандартних задач.

Аналіз олімпіадних завдань

7 клас

На ІІІ етапі Всеукраїнської олімпіади з математики в 7 класі було запропоновано 5 завдань.

Більшість учнів при розв'язуванні першого завдання на подільність чисел одержали правильну відповідь, але без детального обґрунтування логічних кроків. Переважна кількість учнів розв'язала це завдання нераціональним способом.

Друге завдання – задачу на рух лише 1 учень (4,8%) розв'язав алгебраїчним методом, інші – за допомогою логічних міркувань.

Особливі труднощі викликала третя текстова задача на визначення кількості учнів в класі, яка показала, що учні не вміють будувати математичну модель задачі, тому доцільно вчителям акцентувати увагу на цьому етапі розв'язання задачі. Лише один учень розв'язав задачу повністю алгебраїчним методом, інші – за допомогою логічних міркувань.

У четвертому завданні (планіметричній задачі на визначення величини кута) було побудовано малюнок правильно практично у всіх учасників, але допущено помилку у застосуванні ознак рівності трикутників, кути було визначено без обґрунтування або обґрунтування були некоректними.

П'яте завдання на розміщення простих чисел у таблиці майже всі учні виконали, використовуючи механічний спосіб заповнення таблиці без застосування загальних логічних міркувань.

8 клас

З 1 завданням на з'ясування, якою цифрою закінчується різниця, справилися майже всі учні (77,8%).

Завдання 2 (інваріант) робили спробу розв'язати всі учні, 8 учнів (44,4%) розв'язали з повним обґрунтуванням.

Третє завдання на знаходження середнього арифметичного 7 учнів (38,9%) розв'язали з повним обґрунтуванням, 4 учня (22,2%) – розв'язали частково, інші – робили спробу розв'язати.

Геометрична задача вимагала нестандартних підходів, тому учні мало просувалися в обґрунтуванні розв'язання, повністю задача була розв'язана в 4 учнів (22,2%). Частина учнів (5) не справилась із завданням геометричного змісту через неправильно виконаний малюнок, хоча хід розв'язку був правильний.

При розв'язанні 5 завдання більшість учнів дала правильну відповідь, але тільки 5 учнів (27,8%) запропонували стратегію та повністю її обґрунтували.

Шосте завдання виявилося складним, практично всі зробили помилки на перших кроках розв'язання.

9 клас

У першому завданні (знаходження значення виразу) переважна більшість 14 учнів (70%) розв'язала це завдання, деякі нераціональним способом (не застосовуючи формули скороченого множення).

Текстову задачу на знаходження відношення правильно розв'язали 13 учнів 65%), інші при правильно вибраній ідеї розв'язання не зробили правильного висновку.

При розв'язуванні третього завдання пропонувалися різні способи розв'язання, але найбільш раціональний – у 2 (10%) учнів.

Планіметрична задача повністю розв'язана у 3 учнів (15%), помилки виникали у знаходженні кутів прямокутного трикутника, створенні відповідно доцільних допоміжних побудов.

Складнощі при розв'язуванні завдання на розфарбування виникали при обґрунтуванні відповіді та логічному продовженні міркувань при доведенні.

Основна складність 6 завдання – не розуміння математичної сутності цілої та дробової частини, можливостей проведення арифметичних дій над цими функціями. Повністю виконали завдання 3 учні (15%).

10 клас

Перше завдання на порівняння чисел повністю обґрунтували 19% учнів, інші робили обчислювальні помилки.

Текстову задачу правильно розв'язали 17 учнів (81%), інші при правильно вибраній ідеї розв'язання не зробили правильного висновку.

Третє завдання на доведення нерівності вимагало нестандартних підходів, були спроби міркувань, але жодна не була доведена до логічного кінця.

Четверте завдання на розфарбування викликало труднощі практично у всіх учнів, були ідеї, але не завжди міркування були розвинені у розв'язання, учнями розглянуті лише частинні випадки.

Планіметрична задача на доведення була розпочата більшістю учнів, повне обґрунтування зробили лише 4 учні (19%), деякі учні допустили логічні помилки, що не дало можливості здійснити доведення.

Побудову множини точок на координатній площині, координати яких є задовольняють рівність, учнями здійснено, в основному, по точкам (нераціонально), є недоліки в побудові.

11 клас

Виконання першого завдання на побудову графіка функції показало незнання формул тригонометричних функцій, лише 3 учнів (25%) правильно побудували графік.

Текстову задачу правильно розв'язали 6 учнів (50%), інші зробили помилки при складанні математичної моделі задачі та при проведенні обчислень.

Завдання на доведення нерівності виявилося складним для більшості учнів, більшість учасників (50%) зробила незначні просування в міркуваннях, учні обмежувалися частковими випадками.

Четверте завдання на розфарбування повністю не розв'язано у жодного учня, 2 учнями (16,7%) зроблено неповне обґрунтування, практично у всіх учнів, були ідеї, але не завжди міркування були розвинені у розв'язання, учнями розглянуті лише частинні випадки.

Планіметрична задача на доведення була розпочата 8 учнями (66,7%), повне обґрунтування відсутнє, деякі учні допустили логічні помилки, що не дало можливості здійснити доведення.

Побудову множини точок на координатній площині, координати яких є задовольняють рівність, здійснено правильно 2 учнями (16,7%), з незначними недоліками – 2 учнями (16,7%), інші учні лише розпочали виконання завдання.

Аналіз олімпіадних робіт показав, що у процесі підготовки до олімпіади необхідно цілеспрямовано та систематично розв'язувати задачі комбінаторно-логічного змісту (клітчасті дошки, таблиці, графи, допоміжні «розфарбування», числові набори, математичні ігри, принцип «крайнього елемента», інваріанти, напівінваріанти, принцип Діріхле), теоретико-числові задачі, задачі на доведення нерівностей, задачі на властивості цілої та дробової частини числа, різнопланові геометричні задачі.

Пропедевтичний етап підготовки до олімпіади доцільно розпочинати вже з 5 класу: організовувати роботу математичних гуртків та факультативних курсів для 5-6 класів, проводити роботу з підвищення фахового рівня вчителів математики, роботу зі здібними та творчо обдарованими дітьми.

Для досягнення високих результатів необхідно впроваджувати в роботу з обдарованими учнями сучасні технології навчання, оптимізувати індивідуальну роботу, ефективно використовувати години варіативної складової навчального робочого плану (курси за вибором, факультативні заняття з розв'язування

олімпіадних задач), розширити мережу профільних класів та класів з поглибленим вивченням математики.

Необхідно залучати учнів до участі в інтелектуальних математичних змаганнях: Всеукраїнській Інтернет-олімпіаді з математики, Всеукраїнському турнірі юних математиків імені професора М.Й. Ядренка, Міжнародному математичному конкурсі «Кенгуру», Міжнародному чемпіонаті з розв'язування логічних математичних задач. Доцільно забезпечити навчання в заочних фізико-математичних школах (республіканських та обласних), Сумському територіальному відділенні МАН учнівської молоді України.

Робота вчителя з обдарованими учнями не повинна носити епізодичний характер, а має бути систематичною, спланованою на перспективу.

З метою удосконалення підготовки до ІІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики необхідно:

– спланувати науково-методичні заходи щодо вдосконалення навичок учителів та учнів із розв'язування задач підвищеної складності та олімпіадних задач;

– використовувати можливості Інтернет-технологій для підготовки учнів до олімпіади, у тому числі участь в Інтернет-олімпіадах;

– формувати склад команди на ІІІ (обласний) етап з урахуванням відбірково-тренувальних зборів на районному рівні;

– здійснювати співпрацю з вищими навчальними закладами у напрямку роботи з обдарованими учнями;

– здійснювати диференційований, індивідуальний підхід до навчальної діяльності обдарованих учнів та розвитку їх творчих здібностей на уроках та в позаурочний час.

СПИСОК УЧНІВ-ПЕРЕМОЖЦІВ ІІІ ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ УЧНІВСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ, 2014-2015 Н.Р.

№ з/п	Клас	Прізвище, ім'я, по-батькові	Навчальний заклад	Кількість балів	Місце
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	7	Ібрагімова Сабіна Ельшанівна	Ворожбянська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 3 Білопільської районної ради	23	**I**
2	7	Прощенко Вадим Сергійович	Сумська спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 10 ім. Героя Радянського Союзу О. Бутка	20	**II**
3	7	Гриценко Роман Олександрович	Шосткинський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа І-ІІ ступенів – ліцей Шосткинської міської ради	16	**II**
4	7	Кравченко Дмитро Валерійович	Кролевецька спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 3 Кролевецької районної ради	16	**II**
5	7	Непочтов Валентин Олексійович	Лебединська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 1 Лебединської міської ради	13	**III**
6	7	Буренков Олег Сергійович	Сумська спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 10 ім. Героя Радянського Союзу О. Бутка	12	**III**
7	7	Альошкіна Тетяна Олексіївна	Охтирська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 2 Охтирської міської ради	12	**III**
8	7	Єрьоменко Анна Олексіївна	Шосткинський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа І-ІІ ступенів – ліцей Шосткинської міської ради	12	**III**
9	7	Трофименков Олександр Володимирович	Рожковицький навчально-виховний комплекс: загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів-дошкільний навчальний заклад Середино-Будської районної ради	12	**III**
10	7	Гончаренко Дмитро Миколайович	Дубов'язівський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа І-ІІІ ступенів-дошкільний навчальний заклад Конотопської районної ради	12	**III**
11	8	Сітало Максим Євгенійович	Сумська спеціалізована школа І-ІІІ ступенів №17	36	**I**
12	8	Супрун Юлія Олександрівна	Сумська спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 10 ім. Героя Радянського Союзу О. Бутка	31	**II**
13	8	Романюк Анна Євгеніївна	Конотопська гімназія Конотопської міської ради	31	**II**

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
14	8	Чайка Андрій Анатолійович	Шосткинський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа І-ІІ ступенів-ліцей Шосткинської міської ради	29	**ІІІ**
15	8	Романько Ярослав Сергійович	Шосткинський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа І-ІІ ступенів-ліцей Шосткинської міської ради	28	**ІІІ**
16	8	Вавіла Олександра Миколаївна	Середино-Будська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 2 Середино-Будської районної ради	28	**ІІІ**
17	8	Коваленко Тетяна Володимирівна	Кролевецька спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 3 Кролевецької районної ради	22	**ІІІ**
18	8	Батраченко Владислав Олександрович	Тростянецька спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 5 Тростянецької районної ради	22	**ІІІ**
19	8	Тєлєтов Дмитро Олександрович	Олександрівська гімназія Сумської міської ради	21	**ІІІ**
20	9	Кочетков Денис Олександрович	Олександрівська гімназія Сумської міської ради	39	**І**
21	9	Соловей Дар'я Іванівна	Конотопська гімназія Конотопської міської ради	32	**ІІ**
22	9	Мороз Ангеліна Сергіївна	Кролевецька спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 1 Кролевецької районної ради	29	**ІІ**
	9	Дудар Денис Петрович	Шосткинський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа І-ІІ ступенів-ліцей Шосткинської міської ради	28	**ІІ**
23	9	Гурова Юлія Володимирівна	Олександрівська гімназія Сумської міської ради	26	**ІІІ**
24	9	Танасюк Алла Вікторівна	Сумська спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 10 ім. Героя Радянського Союзу О. Бутка	25	**ІІІ**
25	9	Грицина Андрій Сергійович	Сумська гімназія №1 м. Суми	24	**ІІІ**
26	9	Заяц Катерина Валентинівна	Шосткинський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа І-ІІ ступенів-ліцей Шосткинської міської ради	23	**ІІІ**
27	9	Маринченко Данило Дмитрович	Державний ліцей-інтернат з посиленою військово-фізичною підготовкою «Кадетський корпус» імені І.Г. Харитоненка	23	**ІІІ**
28	9	Курінський Вадим Юрійович	Великосамбірський навчально-виховний комплекс: загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів – дошкільний навчальний заклад Конотопської районної ради	21	**ІІІ**

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
29	10	Кролевецький Денис Юрійович	Сумська спеціалізована школа І-ІІІ ступенів №10 ім. Героя Радянського Союзу О. Бутка	27	**I**
30	10	Єременко Іван Сергійович	Сумська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 27 м. Суми	25	**II**
31	10	Гасс Леонід Едуардович	Шосткинський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа І-ІІ ступенів-ліцей Шосткинської міської ради	25	**II**
32	10	Логвіна Ангеліна Вікторівна	Шосткинський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа І-ІІ ступенів-ліцей Шосткинської міської ради	22	**III**
33	10	Бабко Дмитро Сергійович	Конотопська спеціалізована школа І-ІІІ ступенів №12 Конотопської міської ради	20	**III**
34	10	Красніков Андрій Сергійович	Тростянецька спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 3 Тростянецької районної ради	17	**III**
35	10	Свинарчук Максим Владиславович	Кролевецька спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 3 Кролевецької районної ради	17	**III**
36	10	Шевченко Богдан Миколайович	Липоводолинська спеціалізована школа І-ІІІ ступенів Липоводолинської районної ради	15	**III**
37	10	Гаврилюк Катерина Миколаївна	Конотопська гімназія Конотопської міської ради	15	**III**
38	10	Басанець Євгеній Олександрович	Шосткинський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа І-ІІ ступенів-ліцей Шосткинської міської ради	15	**III**
39	11	Московець Наталія Сергіївна	Роменська спеціалізована загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 2 ім. акад. А.Ф.Йоффе Роменської міської ради	30	**I**
40	11	Фірстенко Валерій Миколайович	Олександрівська гімназія Сумської міської ради	21	**II**
41	11	Міняйло Аліна Сергіївна	Беївська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів Липоводолинської районної ради	20	**II**
42	11	Бенхенні Карім Ларбі	Сумська обласна гімназія-інтернат для талановитих та творчо обдарованих дітей Сумської обласної ради	18	**III**
43	11	Боряк Олександр Валерійович	Олександрівська гімназія Сумської міської ради	16	**III**
44	11	Лантух Андрій Миколайович	Конотопська гімназія Конотопської міської ради	16	**III**

СПИСОК УЧИТЕЛІВ, ЯКІ ПІДГОТУВАЛИ УЧНІВ-ПЕРЕМОЖЦІВ ІІІ ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ УЧНІВСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ, 2014-2015 Н.Р.

№	ПІП	Назва закладу
1	*2*	*3*
1	Азаренкова Альона Іванівна (4 переможця)	Сумська спеціалізована школа І-ІІІ ступенів №10 ім. Героя Радянського Союзу О. Бутка
2	Передрій Жанна Миколаївна (4 переможця)	Шосткинський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа І-ІІ ступенів – ліцей Шосткинської міської ради
3	Бур Олена Василівна (3 переможця)	Шосткинський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа І-ІІ ступенів – ліцей Шосткинської міської ради
4	Панченко Тетяна Іванівна (2 переможця)	Олександрівська гімназія Сумської міської ради
5	Шаповалові Світлана Григорівна (2 переможця)	Олександрівська гімназія Сумської міської ради
6	Трач Ольга Олександрівна (2 переможця)	Шосткинський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа І-ІІ ступенів – ліцей Шосткинської міської ради
7	Тележенко Тетяна Олексіївна	Олександрівська гімназія Сумської міської ради
8	Цимбал Надія Андріївна	Сумська гімназія № 1 м. Суми
9	Куценко Ольга Дмитрівна	Сумська спеціалізована школа І-ІІІ ступенів №10 ім. Героя Радянського Союзу О. Бутка
10	Суховій Ольга Іванівна	Сумська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів №27
11	Бережецька Людмила Сергіївна	Сумська спеціалізована школа І-ІІІ ступенів №17
12	Антоненко Наталія Валеріївна	Конотопська гімназія Конотопської міської ради
13	Печерська Тетяна Федорівна	Конотопська гімназія Конотопської міської ради
14	Фалько Олена Сергіївна	Конотопська гімназія Конотопської міської ради
15	Кабачна Світлана Миколаївна	Конотопська гімназія Конотопської міської ради
16	Криворучкін Микита Володимирович	Конотопська спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 12 Конотопської міської ради
17	Лавренко Наталія Миколаївна	Кролевецька спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 3 Кролевецької районної ради
18	Пурига Катерина Степанівна	Кролевецька спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 3 Кролевецької районної ради
19	Галанова Валентина Анатоліївна	Кролевецька спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 3 Кролевецької районної ради

1	*2*	*3*
20	Богдашко Людмила Валентинівна	Кролевецька спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 1 Кролевецької районної ради
21	Руденко Лариса Володимирівна	Ворожбянська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 3 Білопільської районної ради
22	Запека Андрій Юрійович	Роменська спеціалізована загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 2 ім. акад. А.Ф. Йоффе Роменської міської ради Сумської області
23	Левченко Лариса Борисівна	Державний ліцей-інтернат з посиленою військово-фізичною підготовкою «Кадетський корпус» імені І.Г. Харитоненка
24	Селіваненко Людмила Миколаївна	Сумська обласна гімназія-інтернат для талановитих та творчо обдарованих дітей Сумської обласної ради
25	Линник Валентина Петрівна	Тростянецька спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 3 Тростянецької районної ради
26	Лук’яніхіна Ірина Михайлівна	Тростянецька спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 5 Тростянецької районної ради
27	Дремлюга Тетяна Вікторівна	Лебединська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів №1 Лебединської міської ради
28	Герман Людмила Петрівна	Середино-Будська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 2 Середино-Будської районної ради
29	Попіначенко Валентина Іллівна	Рожковицький навчально-виховний комплекс: загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів-дошкільний навчальний заклад Середино-Будської районної ради
30	Назаренко Олександр Максимович	доцент кафедри моделювання складних систем Сумського державного університету, кандидат фізико-математичних наук
31	Мучарова Людмила Іванівна	Охтирська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 2 Охтирської міської ради і
32	Міняйло Алла Миколаївна	Беївська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів Липоводолинської районної ради
33	Зіненко Катерина Іванівна	Липоводолинська спеціалізована школа І-ІІІ ступенів Липоводолинської районної ради
34	Суховєєва Людмила Юріївна	Дубов’язівський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа І-ІІІ ступенів-дошкільний навчальний заклад Конотопської районної ради
35	Давиденко Анатолій Миколайович	Великосамбірський навчально-виховний комплекс: загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів – дошкільний навчальний заклад Конотопської районної ради

ЗАЯВКА

на участь команди Сумської області у IV етапі Всеукраїнської олімпіади з математики у 2015 році

За рішенням оргкомітету і журі III етапу Всеукраїнської олімпіади на IV етап Всеукраїнської олімпіади направляються такі учні-переможці III етапу:

№ з/п	Прізвище, ім'я по батькові учня	Число, місяць, рік народження	Назва навчального закладу	Клас навчання	Клас, за який буде виконувати завдання на олімпіаді	Місце, зайняте на III етапі олімпіади	ПІП працівника, який підготував учня	Додаткова інформація
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
1.	Сітало Максим Євгенійович	19 серпня 2001 року	Сумська спеціалізована школа I-III ступенів №17	8	8	I	Бережецька Людмила Сергіївна	
2.	Кочетков Денис Олександрович	21 липня 2000 року	Олександрівська гімназія Сумської міської ради	9	9	I	Шаповалова Світлана Григорівна	
3.	Кролевецький Денис Юрійович	20 жовтня 1998 року	Сумська спеціалізована школа I-III ступенів № 10 ім. Героя Радянського Союзу О. Бутка	10	10	I	Азаренкова Альона Іванівна	Переможець IV етапу 2014 року – II місце
4.	Гасс Леонід Едуардович	12 листопада 1998 року	Шосткинський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа I-II ступенів – ліцей Шосткинської міської ради	10	10	II	Бур Олена Василівна	
5.	Логвіна Ангеліна Вікторівна	10 листопада 1998 року	Шосткинський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа I-II ступенів – ліцей Шосткинської міської ради	10	10	III	Бур Олена Василівна	Переможець IV етапу 2013 року – III місце
6.	Фірстенко Валерій Миколайович	28 лютого 1998 року	Олександрівська гімназія Сумської міської ради Сумської області	11	11	II	Панченко Тетяна Іванівна	Переможець IV етапу 2012 року – III місце, 2014 року – II місце

Резерв								
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
1.	Романюк Анна Євгеніївна	07 серпня 2001 року	Конотопська гімназія Конотопської міської ради	8	8	II	Антоненко Наталія Валеріївна	
2.	Соловей Дар'я Іванівна	21 серпня 2000 року	Конотопська гімназія Конотопської міської ради	9	9	II	Фалько Олена Сергіївна	
3	Єременко Іван Сергійович	07 березня 1999 року	Сумська загальноосвітня школа I-III ступенів № 27 м. Суми	10	10	II	Суховій Ольга Іванівна	

Керівниками команди призначено Свєтлову Тетяну Володимирівну, методиста математики Сумського обласного інституту післядипломної освіти; Азаренкову Альону Іванівну, учителя математики Сумської спеціалізованої школи I-III ступенів № 10 ім. Героя Радянського Союзу О. Бутка м. Суми.

Директор Департаменту освіти і науки,
голова оргкомітету олімпіади О. І. Попова

Голова журі олімпіади О.С. Чашечникова

Підписи наявні в оригіналі

02 березня 2015 року

IV ЕТАП ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ УЧНІВСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ, 2014-2015 Н.Р.

LV Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики проходила у м. Чернівці з 22 по 26 березня 2015 року.

У олімпіаді взяли участь 164 учасники з 24 областей України, міста Києва та Українського фізико-математичного ліцею.

Сумську область представляла команда у складі 6 учнів. Це:

– Сітало Максим Євгенійович, учень 8 класу Сумської спеціалізованої школи І-ІІІ ступенів №17 м. Суми;

– Кочетков Денис Олександрович, учень 9 класу Олександрівської гімназії Сумської міської ради;

– Кролевецький Денис Юрійович, учень 10 класу Сумської спеціалізованої школи І-ІІІ ступенів № 10 ім. Героя Радянського Союзу О. Бутка м. Суми;

– Логвіна Ангеліна Вікторівна, учениця 10 класу Шосткинського навчально-виховного комплексу: спеціалізована школа І-ІІ ступенів – ліцей Шосткинської міської ради;

– Гасс Леонід Едуардович, учень 10 класу Шосткинського навчально-виховного комплексу: спеціалізована школа І-ІІ ступенів – ліцей Шосткинської міської ради;

– Фірстенко Валерій Миколайович, учень 11 класу Олександрівської гімназії Сумської міської ради.

зліва направо – Сітало Максим, Логвіна Ангеліна, Кочетков Денис, Фірстенко Валерій, Гасс Леонід, Кролевецький Денис

За результатами змагань одержано два призові дипломи ІІІ ступеня:

– Кочетков Денис Олександрович, учень 9 класу Олександрівської гімназії Сумської міської ради – диплом ІІІ ступеня;

– Фірстенко Валерій Миколайович, учень 11 класу Олександрівської гімназії Сумської міської ради – диплом ІІІ ступеня.

Фірстенко Валерій

Кочетков Денис

Результативність команди учнів Сумської області на LV Всеукраїнській учнівській олімпіаді з математики:

№ з/п	Прізвище, ім′я, по батькові	Клас навчання	Найменування навчального закладу	Результат	Диплом
1	Сітало Максим Євгенійович	8	Сумська спеціалізована школа І-ІІІ ступенів №17 м. Суми Сумської області	19	–
2	Кочетков Денис Олександрович	9	Олександрівська гімназія Сумської міської ради Сумської області	28	ІІІ
3	Кролевецький Денис Юрійович	10	Сумська спеціалізована школа І-ІІІ ступенів № 10 ім. Героя Радянського Союзу О. Бутка м. Суми Сумської області	15	–
4	Гасс Леонід Едуардович	10	Шосткинський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа І-ІІ ступенів – ліцей Шосткинської міської ради Сумської області	10	–
5	Логвіна Ангеліна Вікторівна	10	Шосткинський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа І-ІІ ступенів – ліцей Шосткинської міської ради Сумської області	13	–
6	Фірстенко Валерій Миколайович	11	Олександрівська гімназія Сумської міської ради Сумської області	22	ІІІ

Голова організаційного комітету: О.М. Палійчук
Голова журі: Б.В. Рубльов
Секретар: І.В. Жук

Підписи наявні в оригіналі

III та IV етапи Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики у 2014-2015 н.р.

Інформаційно-аналітичний бюлетень

Упорядник: Т.В. Свєтлова

Підписано до друку _____ _____ 2015 р. Формат 60×84/16
Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman. Тираж_____ прим.

РВВ СОІППО, вул. Р. Корсакова, 5, м. Суми, 40007
тел./факс: (0542) 33-40-67