

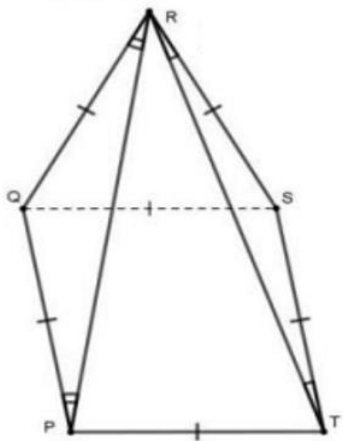
Відповіді

**II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2024-2025 н.р.
11 клас**

Завдання 1.

Відповідь. 30° .

Розв'язання. Із умови задачі маємо, що: $\angle PRQ + \angle TRS = \angle PRT$ (*).



Доведемо, що $QPTS$ – паралелограм (рис). Дійсно, використовуючи рівність кутів при основі в рівнобедрених трикутниках PQR і RST та рівність (*), отримаємо:

$$\begin{aligned} \angle QPT + \angle PTS &= \angle QPR + \angle RPT + \angle RTP + \angle STR = \\ &= \angle PRQ + \angle TRS + (180^\circ - \angle PRT) = 180^\circ. \end{aligned}$$

Таким чином, $PQ \parallel ST$ і $PQ = ST$ (за умовою), тобто $QPTS$ – паралелограм.

Тоді $QS = PT$, отже, трикутник QRS – рівносторонній. Отже, $\angle PRT = 0,5 \angle QRS = 30^\circ$

Завдання 2.

Відповідь. число $a = \sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{3 - 8\sqrt{35 - 8\sqrt{19}}}}$ є цілим.

Розв'язання. Оскільки

$$\begin{aligned} 35 - 8\sqrt{19} &= 35 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{19} = 19 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{19} = \sqrt{19}^2 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{19} + 4^2 = \\ &= (\sqrt{19} - 4)^2, \text{ то } \sqrt{35 - 8\sqrt{19}} = \sqrt{(\sqrt{19} - 4)^2} = \sqrt{19} - 4 \quad (*) \end{aligned}$$

і тому, із урахуванням (*), має місце рівність:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{3 - 8(\sqrt{19} - 4)}} = \sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{3 - 8\sqrt{19} + 32}} = \\ &= \sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{35 - 8\sqrt{19}}} \quad (**) \end{aligned}$$

і тому, урахуванням (*) і (**) має місце рівність:

$$a = \sqrt{\sqrt{19} - (\sqrt{19} - 4)} = \sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{19} + 4} = \sqrt{4} = 2.$$

Таким чином, дане число є натуральним, а тому й цілим. Що й треба було довести.

Завдання 3.

Відповідь. $\frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Гарно відомим є **Твердження***. Якщо T – основний період (найменший додатний період) періодичної функції $y = f(x)$, то основним періодом функції $g(x) = a + b \cdot f(k \cdot x + c)$, де $a, b, k, c \in \mathbb{R}$ і $b \cdot k \neq 0$, є число $T_0 = \frac{T}{|k|}$.

$$\begin{aligned} \text{Отже: } \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) = \\ &= 1 \cdot (\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) = \\ &= (\sin^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - 3(\sin x \cdot \cos x)^2 = \\ &= 1 - \frac{3}{4}(2 \cdot \sin x \cdot \cos x)^2 = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cdot \cos 4x. \end{aligned}$$

Оскільки основним періодом функції $y = \cos x$ є число 2π , з урахуванням

Твердження*, (основним) періодом функції $y = \sin^6 x + \cos^6 x \equiv \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cdot \cos 4x$ є число $T_0 = \frac{T}{|k|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Завдання 4.

Відповідь. Кількість спільних точок графіків функцій залежно від параметра a є такою: $a < 0$: 0 точок,

$a = 0$: 1 точка,

$0 < a < 2$: 2 точки,

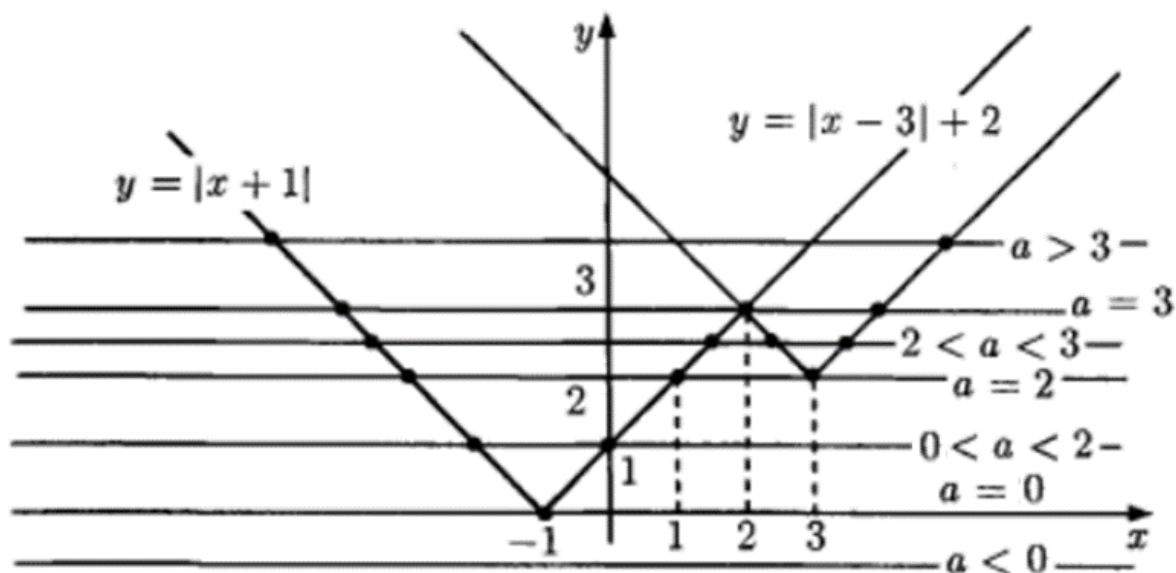
$a = 2$: 3 точки,

$2 < a < 3$: 4 точки,

$a = 3$: 3 точки,

$a > 3$: 2 точки.

Розв'язання. Побудовано графік.



Завдання 5.**Відповідь. 2.****Розв'язання.**

Оскільки $f(0) = \frac{b}{d} = 1$, то $d = b$, і тому $f(x)$ можна подати у вигляді:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Оскільки $f(1) = \frac{a+b}{c+b} = 0$, то $b = -a$, і тому $f(x)$ має вид:

$$f(x) = \frac{ax-a}{cx-a}.$$

Аналогічно, з умови $f(2) = \frac{2a-a}{2c-a} = 3$ маємо $a = 6c - 3a$. Звідки $c = \frac{2}{3}a$.

І тому функцію $f(x)$ можна подати у вигляді:

$$f(x) = \frac{ax-a}{\frac{2}{3}ax-a} = \frac{3(x-1)}{2x-3}.$$

При заданих умовах, а не може дорівнювати нулеві. Дійсно, із припущення про обернене, одержимо наступні умови: $1 = \frac{b}{d}$, $0 = \frac{b}{c+d}$, $3 = \frac{b}{3c+d}$, які одночасно не можуть виконуватись.

Таким чином, $f(3) = \frac{3(3-1)}{2 \cdot 3 - 3} = 2$.

Завдання 6.**Відповідь. 3:1.**

Розв'язання. Нехай вписане коло дотикається до сторін AB та BC у точках P та Q відповідно (рис). Позначимо $CD = CQ = x$ та $AD = AP = kx$. Оскільки $BA = BK$ та $BP = BQ$, то $PA = QK$, $CK = kx - x$. За властивістю січних, проведених з точки C до другого кола, має місце рівність $CD \cdot CA = CK^2$.

Тому $x(x + kx) = (kx - x)^2$. Розкриваємо дужки і, розділивши обидві частини рівності на x^2 , отримуємо рівність $k^2 = 3k$. З неї випливає, що $k = 3$.

