

Відповіді

II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2024-2025 н.р.

8 клас

Завдання 1.

Відповідь. 6 балів.

**Розв'язання.** Нехай учень вірно записав відповідь на  $k$  запитань та на  $n$  – не вірно. Тоді  $k + n = 30$ , або  $n = 30 - k$ . Можлива кількість балів, яку міг набрати учень дорівнює:  $N = 5k - n = 5k - 30 + k = 6k - 30 = 6(k - 5)$ .

Тобто кількість набраних балів завжди має бути кратною 6, тому найменша можлива кількість – це 6.

Тоді  $k - 5 = 1 \Rightarrow k = 6$ ,  $n = 24$  і набрані бали:  $N = 5 \cdot 6 - 24 = 6$ .

Завдання 2.

Відповідь. 22.

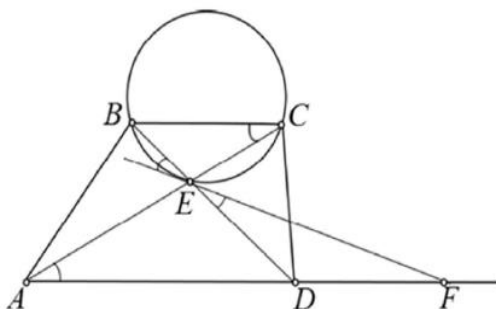
**Розв'язання.** Нехай  $x$  – число учнів у класі, які уміють плавати та грати у шахи. Тоді за формулою «включення-виключення» має місце рівняння:

$$5 = 40 - (30 + 27) + x, \text{ звідки } x = 30 + 27 - (40 - 5) = 57 - 35 = 22.$$

Завдання 3.

Відповідь.  $\sqrt{a(a - b)}$ .

**Розв'язання.** Трикутники  $AEF$  і  $EDF$  подібні, бо вони мають спільний кут  $F$  і  $\angle FAE = \angle ACB = \angle FED$  (бо кут між дотичною  $EF$  і хордою  $BE$  дорівнює вписаному  $\angle BCE$ ).



З подібності цих трикутників випливає:

$$\frac{AF}{EF} = \frac{EF}{DF} \rightarrow EF^2 = AF \cdot DF$$

$$\text{Отже, } EF = \sqrt{a(a - b)}.$$

Завдання 4.

Відповідь. 4, 2.

**Розв'язання.** Перепишемо рівність таким чином:  $xy - y^2 = x$  або  $x(y - 1) = y^2$ . Оскільки числа  $y^2$  та  $y - 1$  взаємно прості, тобто не мають спільних дільників за

модулем більшим від 1, то з останньої рівності  $x \mid y^2$  та  $y^2 \mid x \Rightarrow x = \pm y^2$ . Урахуємо, що  $y \neq 0$ . Якщо  $x = y^2$ , то маємо рівність  $y^3 - y^2 = y^2 \Rightarrow y = 2$  та  $x = 4$ . Якщо  $x = -y^2$ , то маємо рівність  $-y^3 - y^2 = -y^2 \Rightarrow y = 0$  та цей випадок не дає нових розв'язків.

**Завдання 5.** Ненульові числа  $a, b$  задовольняють умови:

$$6a + 6b = \frac{25}{a} + \frac{25}{b} = 25.$$

Знайдіть значення виразу  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ .

**Відповідь.**  $\frac{13}{6}$

**Розв'язання.** З умови задачі отримуємо, що  $6(a + b) = \frac{25(a+b)}{ab} = 25$ . Так як

$$a + b = \frac{25}{6}, \text{ то } ab = \frac{25}{6}. \text{ Враховуючи, що } a + b = \frac{25}{6}, \text{ отримаємо: } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} = (a \cdot b) - 2 = \frac{25}{6} - 2 = \frac{13}{6}.$$

**Завдання 6.**

**Відповідь.** 125 км.

**Розв'язання.** Рейс автобуса туди і назад триває 7,5 годин, при цьому, так як в гору він йде в два рази повільніше, ніж під гору, то на всі підйоми автобус витрачає у два рази більше часу, ніж на спуски. Таким чином, на спуски він витрачає 2,5 години, а на підйоми – 5 годин. Отже, відстань від А до В дорівнює:  $(25 \cdot 5 + 50 \cdot 2,5) / 2 = 125$  км.