

Відповіді

II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2024-2025 н.р.

9 клас

Завдання 1.

Відповідь. $a = 1$.

Розв'язання.

$$(x+2)\sqrt{x^2-4x+4} = (x+2)|x-2|.$$

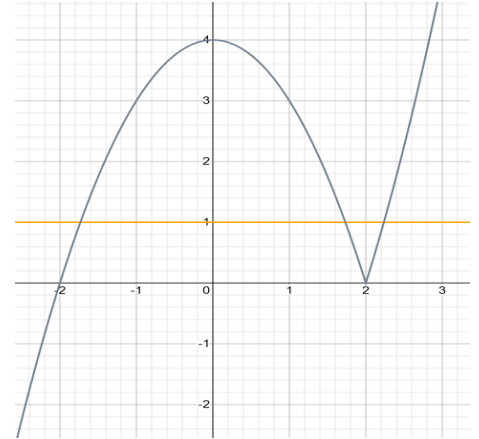
Будуємо графіки функцій:

$$y = (x+2)|x-2| \text{ та } y = a \text{ (рис),}$$

при $x-2 \geq 0$, тобто при $x \geq 2$ маємо $y = x^2 - 4$,

при $x-2 < 0$, тобто, при $x < 2$, відповідно

$$y = -(x^2 - 4).$$



При $a > 0$ графіки $y = (x+2)|x-2|$ та $y = a$ мають три точки перетину, тобто при найменшому цілому значенні параметра a , знаходимо, що $a = 1$.

Завдання 2.

Відповідь. 0 або 2.

Розв'язання. Із заданої умови отримаємо, що:

$$a^2(1+b^2) + b^2(1+a^2) = (1+a^2)(1+b^2) \Leftrightarrow a^2b^2 = 1.$$

Тепер розглянемо два випадки.

Варіант 1. $ab = 1$, або $b = \frac{1}{a}$, то $\frac{a}{1+a^2} + \frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a^2}} = \frac{a}{1+a^2} + \frac{a}{1+a^2} = \frac{2a}{1+a^2}$, звідси

$$(a+b)\left(\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2}\right) = \left(a + \frac{1}{a}\right) \frac{2a}{1+a^2} = 2.$$

Варіант 2. $ab = -1$, або $b = -\frac{1}{a}$, то $\frac{a}{1+a^2} + \frac{-\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a^2}} = \frac{a}{1+a^2} - \frac{a}{1+a^2} = 0$, звідси

$$(a+b)\left(\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2}\right) = 0.$$

Завдання 3.

Відповідь. нерівність доведена.

Розв'язання. Оскільки $x^2 + 4 \geq 4x$, $y^2 + 4 \geq 4y$, $z^2 + 4 \geq 4z$, то

$$\begin{aligned}xyz^2 + xy^2 + x^2 + 4 &\geq xyz^2 + xy^2 + 4x = x(yz^2 + y^2 + 4) \geq \\&\geq x(yz^2 + 4y) = xy(z^2 + 4) \geq xy \cdot 4z = 4xyz.\end{aligned}$$

Завдання 4.**Відповідь. 5.**

Розв'язання. Нехай $x^2 - 4x + 11 = t^2$. Відомо, що $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ – квадрат деякого цілого числа $r = x - 2$, меншого за t . Тоді отримуємо:

$t^2 - r^2 = (t + r)(t - r) = 7$. Числа $(t + r)$ і $(t - r)$ – натуральні і перше число більше, ніж друге. Значить, $(t + r) = 7$, а $(t - r) = 1$. Розв'язавши цю систему, отримаємо $t = 4$, $r = 3$, що дає $x = 5$.

Завдання 5.

Відповідь. Графік побудовано (рис)

Розв'язання.

Якщо $[x] = 2k$ ($2k \leq x < 2k + 1$), $k \in \mathbb{Z}$, тоді

$$y = [x] + \frac{1}{2} \cdot (x - [x]) \cdot (1 + (-1)^{2k}) =$$

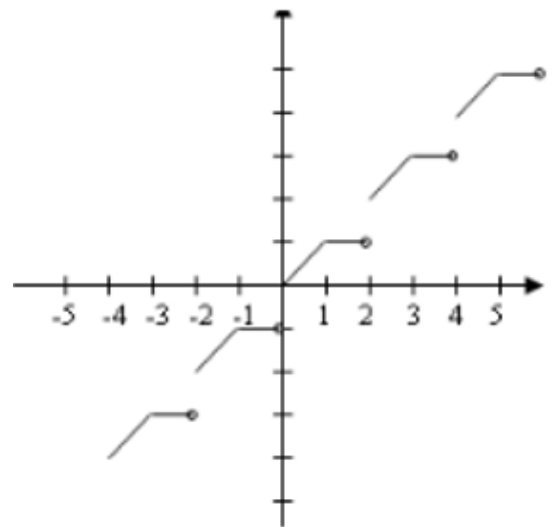
$$= [x] + \frac{1}{2} \cdot (x - [x]) \cdot (1 + 1) =$$

$$= [x] + \frac{1}{2} \cdot (x - [x]) \cdot 2 = x$$

Якщо $[x] = 2k - 1$ ($2k - 1 \leq x < 2k$), $k \in \mathbb{Z}$,

$$\text{тоді: } y = [x] + \frac{1}{2} \cdot (x - [x]) \cdot (1 + (-1)^{2k-1}) =$$

$$= [x] + \frac{1}{2} \cdot (x - [x]) \cdot (1 - 1) = [x] = 2k - 1$$

**Завдання 6.**

Відповідь. $ME = DN$.

Розв'язання. Оскільки $\angle ADC = \angle AEC$, то чотирикутник $AEDC$ – вписаний.

Спосіб 1. За властивістю вписаного чотирикутника $\angle NDC = \angle BAC = \alpha$, $\angle MEA = \angle BCA = \gamma$ (рис. 1).

Із прямокутних трикутників AME і AEC , отримуємо:

$$ME = AE \cos \gamma = AC \cos \alpha \cos \gamma.$$

$$\text{Аналогічно, } DN = DC \cos \alpha = AC \cos \gamma \cos \alpha.$$

Отже, $ME = DN$.

Зауважимо, що використані рівності кутів можна отримати з подібності трикутників DBE і ABC , які, в свою чергу, можна отримати з подібності трикутників ABD і CBE .

Спосіб 2. Скористаємося тим, що центром кола, описаного навколо $AEDC$, є середина O сторони AC . Оскільки трикутник DOE – рівнобедрений, то його висота OK є його медіаною, тобто $EK = KD$ (рис. 2).

Прямі AM , OK і CN перпендикулярні прямій ED , тому паралельні одна одній. Оскільки $AO = OC$, то за теоремою Фалеса $MK = KN$.

Тоді $ME = MK - EK = KN - KD = DN$, що й необхідно довести.

Зауважимо, що $OE = OD$ тому, що ці відрізки є медіанами прямокутних трикутників із спільною гіпотенузою й проведені до неї.

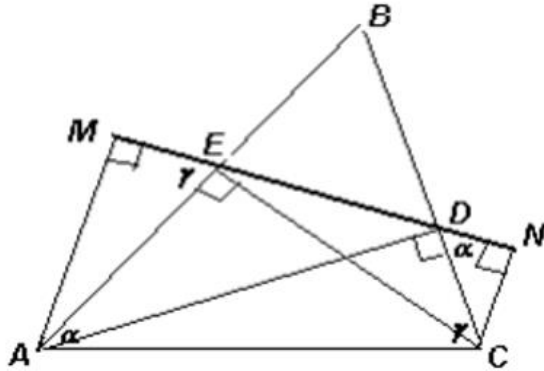


Рис.1.

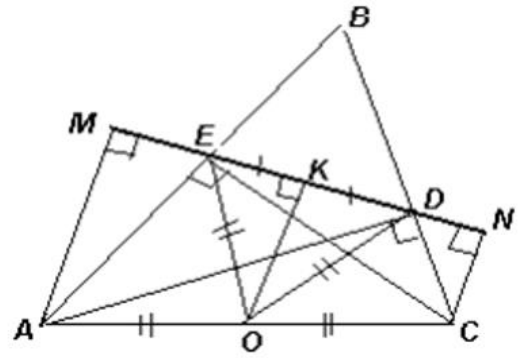


Рис.2.