

Відповіді

II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2024-2025 н.р.

10 клас

Завдання 1.

Відповідь. 3.

Розв'язання. ОДЗ рівняння  $x \geq 3$ , при цьому ліва частина:

$y = \sqrt[4]{(x-2)^2} + \sqrt[6]{x-3} = \sqrt{|x-2|} + \sqrt[6]{x-3} = \sqrt{x-2} + \sqrt[6]{x-3}$  – зростаюча функція на ОДЗ, тому вона має не більш як одну спільну точку з прямою  $y = 1$ . Підбором знаходимо цю точку:  $x = 3$ .

Завдання 2.

Відповідь. Графік побудовано (рис)

Розв'язання.

Якщо  $[x] = 2k$  ( $2k \leq x < 2k+1$ ),  $k \in \mathbb{Z}$ , тоді

$$y = [x] + \frac{1}{2} \cdot (x - [x]) \cdot (1 + (-1)^{2k}) =$$

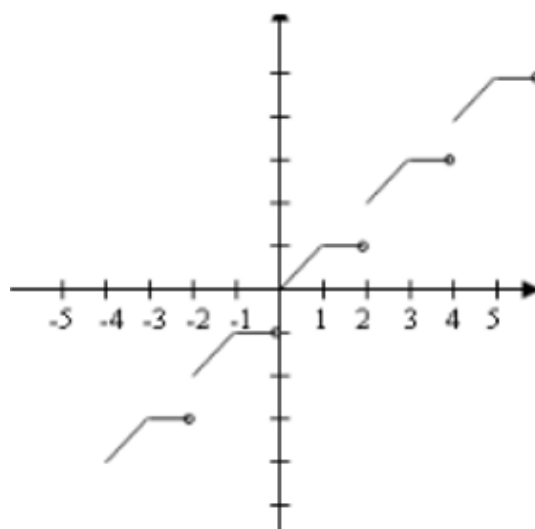
$$= [x] + \frac{1}{2} \cdot (x - [x]) \cdot (1 + 1) =$$

$$= [x] + \frac{1}{2} \cdot (x - [x]) \cdot 2 = x$$

Якщо  $[x] = 2k-1$  ( $2k-1 \leq x < 2k$ ),  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\text{тоді: } y = [x] + \frac{1}{2} \cdot (x - [x]) \cdot (1 + (-1)^{2k-1}) =$$

$$= [x] + \frac{1}{2} \cdot (x - [x]) \cdot (1 - 1) = [x] = 2k - 1$$



Завдання 3.

Відповідь.  $x \in (-\infty, +\infty)$ .

Розв'язання. Оскільки  $\cos x \leq 1$ , то

$$3 \cos(3x) + 5 \cos(5x) + \dots + 89 \cos(89x) \leq 3 + 5 + \dots + 89 = \frac{(3 + 89) \cdot 44}{2} = 2024.$$

Завдання 4.

Відповідь. 20.

Розв'язання. Нехай  $m$  – кількість хлопчиків у цьому класі, а  $d$  – кількість дівчаток. Тоді сумарний зріст усіх хлопчиків дорівнює  $S = m \cdot 155$  см, а сумарний зріст всіх дівчаток дорівнює  $s = d \cdot 148$  см. Отже, сумарний зріст всіх учнів цього класу  $S + s = m \cdot 155 + d \cdot 148$  (см), а з іншої сторони в класі 28 учнів і середній зріст їх дорівнює

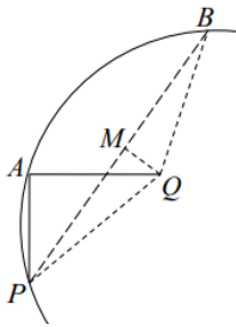
150 см, тоді сумарний зріст усіх учнів дорівнює  $28 \cdot 150 = 4200$  см. Отже  $m + d = 28$  і  $(28 - d) \cdot 155 + d \cdot 148 = 4200$ .

Розв'язавши рівняння, одержимо  $d = 20$ . У класі 20 дівчаток.

### Завдання 5.

**Відповідь.**  $\angle AQB - \angle PQA = 2\angle APB$ .

**Розв'язання.** На колі розташовані точки  $P, A, B$ , а всередині кола – точка  $Q$  таким



чином, що  $\angle PAQ = 90^\circ$ ,  $PQ = OB$  та точки  $P$  і  $B$  лежать по різні сторони від прямої  $AQ$ . Позначимо через  $M$  – середину відрізка  $PB$  (рис). Тоді  $\angle PMQ = \angle PAQ = 90^\circ$  і чотирикутник  $PAMQ$  – вписаний.

Звідси  $\angle APM = \angle AQM$ .

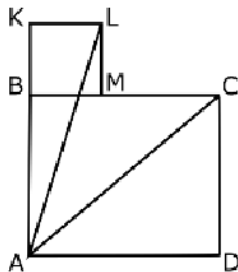
Маємо, що  $\angle AQB - \angle AQP = \angle AQM + \angle MQB - \angle AQP = \angle AQM + (\angle MQP - \angle AQP) = 2\angle AQM = 2\angle APM$ , що й

треба було довести.

### Завдання 6.

**Відповідь.**  $30^\circ$ .

**Розв'язання.** Позначимо  $AB = a$ ,  $BK = b$ . За теоремою Піфагора для



$\triangle ADC$ ,  $AC = a\sqrt{2}$ . За теоремою Піфагора для  $\triangle AKL$  та з рівності  $AC = AL$  маємо:  $(a + b)^2 + b^2 = AL^2 = AC^2 = 2a^2$ ,

звідки  $2b^2 + 2ab - a^2 = 0$ . Поділивши обидві частини на  $a^2 \neq 0$  і

замінивши  $t = \frac{b}{a}$ , одержимо  $2t^2 + 2t - 1 = 0$ , звідки  $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ .

За теоремою Піфагора для  $\triangle LMC$ :

$$LC^2 = b^2 + (a - b)^2 = a^2 - 2ab + 2b^2.$$

За теоремою косинусів для  $\triangle LAC$ :  $LC^2 = AL^2 + AC^2 - 2AL \cdot AC \cdot \cos \angle CAL$ .

Тоді  $a^2 - 2ab + 2b^2 = 4a^2 - 4a^2 \cdot \cos \angle CAL$ .

Підставимо в останню рівність  $b = a \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$  і отримаємо, що  $\cos \angle CAL = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Таким чином,  $\angle CAL = 30^\circ$ .